Лекция 8
Уравнения за движение на идеални течности

1. Напрежения в идеалните течности

Идеална течност е течност, за която вътрешното триене и топлопроводността могат да бъдат пренебрегнати. Това значи, че липсват тангенциални напрежения и взаимодействието между отделните обеми флуид се осъществява само чрез нормални сили и напрежения.

$$p_{xy} = p_{yx} = 0; \quad p_{xz} = p_{zx} = 0; \quad p_{yz} = p_{zy} = 0$$

или $\quad p_{xy} = p_{yx} = p_{xz} = p_{zx} = p_{yz} = p_{zy} = 0$

Тогава уравненията за компонентите на напреженията (31) се записват по следния начин: $p_{nx} = p_n . n_x; \quad p_{ny} = p_n . n_y; \quad p_{nz} = p_n . n_z$

Ако се продължи опростяването на изразите може да се запише: $p_{nx} = p_n . n_x = p_{xx} . n_x$

Аналогично за другите две компоненти: $p_n = p_{xx}; \; pn = p_{yy} \; ; pn = p_{zz}$

Следователно, трите компоненти са равни помежду си и може да се въведе общо означение на налягането: $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p_n = -p$ Поставя се знак "-", защото с това означение се представя налягането с което флуида действа върху разглеждания обем (налягането, което уравновесява действащите в различно ориентираните площадки налягания). Горните равенства показват, че при движение на идеална течност нормалното напрежение (налягането) в дадена точка не зависи от направлението от площадката. То е насочено в обратна посока на външната нормала на площадката (затова има знак '-'). Това е хидродинамично налягане и е скаларна величина.

2. Уравнение на Ойлер за движение на идеална течност

Записано за оста x, основното уравнение (36) за движени има вида:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \cdot X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}.$$

За идеални течности е в сила $p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$ и $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$. Тогава горното уравнение приема вида:

$\rho \frac{du}{dt} + \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x};$ и аналогично за уравненията по другите оси:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \cdot Y - \frac{\partial p}{\partial y}; \qquad (46)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho \cdot Z - \frac{\partial P}{\partial z}$$

Във векторна форма тези уравнения се записват като:

$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} grad \cdot p$ и са известни като уравнения на Ойлер за движение на идеални течности.

При преход към хидростатиката (неподвижен флуид) скоростите на движение се нулират и се получава:

$$\rho \cdot X = \frac{\partial P}{\partial x}; \cdots \rho \cdot Y = \frac{\partial P}{\partial y}; \ldots \rho \cdot Z = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Това са уравненията на хидростатиката (5).

В общия случай скоростта $\vec{V}$ зависи и от времето, и от пространствените координати:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\Delta)\vec{V}$$

В координатен вид с подробен запис на скоростта уравненията на Ойлер имат вида:

$$\left\|\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right. \qquad (47)$$

За интегрирането на тези уравнения трябва да се добавят начални и гранични условия.

3. Уравненията на Ойлер във формата на Громек

Разглежда се лявата част на уравненията на Ойлер (47) – преобразованията се правят само за първото от уравненията, но по аналогия се пренасят и за другите уравнения от системата: $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$

Към дясната част се прибавят и изваждат изразите: $v\frac{\partial v}{\partial x};\dots w\frac{\partial w}{\partial x}$, с което не се променя стойността на общия израз;

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}+(v\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial v}{\partial x})+w(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}).$$

Като се вземе пред вид, че: $u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x};\dots v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x};\dots w\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial w^2}{\partial x}$

и $\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=rot_z\vec{V};\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=rot_y\vec{V}$,

се получава:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial x}+\frac{\partial w^2}{\partial x})+(rot_y\vec{V}.w-rot_z\vec{V}.v)=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2)+$$

$$+(rot\vec{V}\times\vec{V})_x=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+(rot\vec{V}\times\vec{V})_x$$

Общо за уравнението на Ойлер се получава:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x}+(rot\vec{V}\times\vec{V})_x=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ако масовите сили X, Y, Z имат потенциал Ф, то:

$$X=-\frac{\partial\Phi}{\partial x};\dots Y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y};\dots Z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Rightarrow -d\Phi=Xdx+Ydy+Zdz.$$

Масовите сили са пример за потенциални сили.

Ако течността е несвиваема, то: $\rho=const$ и за горното уравнение се получава:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{V^2}{2}+\Phi+\frac{P}{\rho})+(rot\vec{V}\times\vec{V})x=0 \qquad (48)$$

или във векторен вид: $\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+grad(\frac{V^2}{2}+\Phi+\frac{P}{\rho})+(rot\vec{V}\times\vec{V})=0$

Това е уравнението на Ойлер във форма на Громек

4. Интеграл на Коши-Лагранж и Бернули за потенциално движение

Ако в цялата област на течението $rot\vec{V} = 0$, то съществува потенциал на скоростта φ:

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \ldots v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \ldots w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \varphi}{\partial t})$

Тогава уравнението на Ойлер (във формата на Громек) приема вида:

$$grad(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{P}{\rho}) = 0 .$$

Това означава, че производната по пространствената координата на израза в скобата е нула. Следователно този израз зависи само от времето и не зависи от координатите. Тогава решението на интегралът би следвало да изглежда по следния начин: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Phi + \frac{P}{\rho} = f(t)$, където $f(t)$ се определя от граничните условия. Този интеграл се нарича интеграл на Коши-Лагранж.

Когато като масова сила действа само теглото, то

$\Phi = gz,$ защото $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g$ и за интеграла на Коши-Лагранж се получава:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = f(t) \qquad (49)$$

В това уравнение има две неизвестни ***φ*** и ***p***. За да се получи затворена система се добавя уравнението на непрекъснатостта $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, което във форма, записана с φ има вида:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$ - уравнение на Лаплас.

От това уравнение може да се определи φ и скоростта $\boldsymbol{V^2}$.

$$V^2 = (\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial z})^2$$

Тази стойност се замества в (49) и може да се определи ***p***.

Ако движението е стационарно производната по времето в (49) е нула: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$.

Тогава:

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = C_1 \qquad (50)$$

Този интеграл се нарича интеграл на Бернули, за потенциално стационарно течение на идеална течност.

При умножаване на (50) с ***ρ*** се получава уравнението на Бернули, в което отделните слагаеми са с размерност налягане:

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + p = C = P_0 , \qquad (51)$$

където $\boldsymbol{p_0}$ е пълно налягане

p - пиезометрично налягане (статично налягане);

$\frac{\rho V^2}{2}$ - скоростен или динамичен напор (динамично налягане);

ρgz- гравитационен напор (гравитационно налягане).

Ако се раздели уравнението на Бернули (49) на ***g*** се получава уравнение, в което размерността на отделните членове е дължина (напорна височина) – съответно пиезометрична, динамична и гравитационна височина (напор):

$$\frac{V^2}{2g} + z + \frac{P}{g\rho} = z_0$$

При отсъствие на масови сили интегралът на Бернули приема вида:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C;$$

Ако в интеграла на Бернули се положи ***V = 0***, се получава уравнението на хидростатиката $p + \rho g z = const$.