Лекция 2

Хидростатично налягане (неподвижни течности)

Хидростатиката изучава законите за равновесие на флуидите и взаимодействието им с ограждащите ги стени или потопените в тях изцяло или частично твърди тела. Равновесието е механично състояние на относителен покой между отделните флуидни частици. То е възможно, когато разглеждан флуиден обем е неподвижен или се движи спрямо избрана координатна система по начин, при който отделните му съставни частици не изменят положението си една спрямо друга, т.е. когато целият обем се движи като твърдо тяло. При праволинейно движение това е възможно, ако всички флуидни частици се движат с еднаква скорост или ускорение, а при криволинейно движение – с еднаква ъглова скорост, респ. с нормално ускорение. Равновесието на флуидите се определя от силовото взаимодействие и съществува само когато векторната сума от всички външни сили и моменти или сумите от техните проекции по съответните координатни оси са равни на нула.

Във флуидите не могат да действат съсредоточени сили вследствие на свойството им да текат. Възможно е само действието на сили, които са непрекъснато разпределени във флуидния обем или по повърхнината, наречени съответно масови и повърхностни сили.

Масови сили. Приложени са върху всички частици на флуидния обем и са пропорционални на съответните им маси. Това са преди всичко теглото, инерционните сили на възможните преносни ускорителни движения на съда или системата, а също така и различните видове електромагнитни и други сили.

Непрекъснатото разпределение на масовите сили във флуидния обем дава основание да се приеме съществуването на съответни силови полета, чийто интензитет се определя по израза

$$F = \frac{\Delta F_M}{\Delta m}, \frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2},$$

където ΔF_M е главният вектор на масовата сила, действаща на масата Δm . Всъщност интензитетът на силовото поле (специфична масова сила) може да се интерпретира физически като сила, действаща върху единица маса, разположена в полето, която по абсолютна стойност е равна на съответното ускорение.

Както се вижда, измерителната единица за специфична масова сила е идентична с измерителната единица за ускорение. Ако масовата сила е теглото на флуида G, то специфичната масова сила (интензитет) е земното ускорение:

$$F = \frac{G}{m} = \frac{g \cdot m}{m} = g$$

Тъй като силата е векторна величина, то и специфичната масова сила е вектор и може да се представи чрез своите компоненти по отделните оси на координатната система:

$$\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k} \qquad (1)$$

където $\boldsymbol{X, Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ са компонентите на специфичната масова сила по осите $\boldsymbol{x, y}$ и $\boldsymbol{z}$.

Повърхностни сили. Повърхностните сили са приложени по повърхнината на разглеждания флуиден обем или отделни негови елементи. Те се обуславят от непосредственото въздействие на частиците на съседните флуидни обеми или на други тела (твърди или газове), които са в допир с разглеждания флуиден обем. В най-общия случай приложените върху произволен повърхнинен елемент повърхностни сили биват нормални и тангенциални. Тези сили, отнесени към единица площ, определят съответните напрежения: нормални (за опън или натиск) – с направление по нормалата към повърхнинния елемент, и тангенциални - когато лежат в неговата равнина.

Поради малките кохезионни сили, респ. свойството им да текат, флуидите не могат да понасят нормални напрежения на опън. В съответствие със закона на Нютон за триенето при флуидите в равновесие (неподвижни или движещи се без деформация) е невъзможно да съществуват тангенциални напрежения. Следователно вътрешното напрегнато състояние на флуидите в относителен покой се характеризира само с нормални напрежения на натиск и е значително по-просто от това на еластичните тела.

Налягане. Нормалното напрежение на натиск при флуидите се нарича налягане и се бележи с $\boldsymbol{p}$. Ако нормалната сила на натиск $\boldsymbol{\Delta P}$ е равномерно разпределена по лицевия елемент $\boldsymbol{\Delta f}$**,** налягането се определя с отношението

$$p = \frac{\Delta P}{\Delta f}.$$

При неравномерно разпределение на силата на натиск от уравнението се определя средната стойност на налягането. В най-общия случай налягането в произволна точка е равно на границата на отношението

$$p = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta f} = \frac{dP}{df},$$

когато лицевият елемент Δf клони към нула така, че разглежданата точка да остава винаги в него.

Измерителната единица за налягане е N/m^2 = Pa. Тази единица за налягане се нарича Паскал и се бележи с Pa. Наред с нея се използват и следните производни единици: килопаскал (кPa = 10^3Pa) и мегапаскал (MPa = 10^6 Pa).

Заедно с тази единица се използват и няколко други:

Физическа атмосфера - 1 atm = 101325 Pa. Това е налягането, което упражнява въздушната обвивка на земята, измерено на морското равнище.

$$1\ ata = 101325\ \text{Pa} = 760\ mm\ Hg.$$

Техническа атмосфера - 1 atm = 98100 Pa. Това е стара измерителна единица и се равнява на налягане 1 [kgf/sm^2].

$$1\ ata = 98100\ \text{Pa} = 736\ mm\ Hg = 10000\ mm\ H_2O.$$

Бар (Bar) – 1 bar = 100000 Pa.

Налягането се измерва и посредством височината на стълб течност. Използва се известната от хидростатика зависимост:

$$\boldsymbol{p = h\, g\, \rho} \qquad (1.7)$$

Проверката на измерителната единица показва, че тази величина е налягане:

$$[m.\ m/s^2.\ kg/m^3] = [(kg.m)/s^2.\ 1/m^2] = [N/m^2]$$

Тъй като земното ускорение и плътността са постоянни величини, налягането е пропорционално на стълба течност:

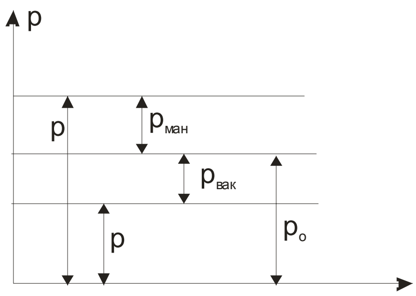
$$\boldsymbol{h = p/(g\,\rho)}\ \ [m]. \qquad (1.8)$$

Така височината може да се използва като мярка за налягането.

Например 1 техническа атмосфера преобразувана във воден стълб има следната стойност:

$$h_{wat} = \frac{98100}{1000\ .9{,}81} = 10 \quad [m].$$

Начини на определяне на налягането. При определяне на налягането, важна роля играе атмосферното налягане ($\boldsymbol{p_o}$). На фиг.1.1 е показана схема за определяне на



Фиг. 1.1 Видове налягане

различните компоненти на налягането: абсолютно ($\boldsymbol{p}$), манометрично ($\boldsymbol{p_{ман}}$) и вакуметрично налягане ($\boldsymbol{p_{вак}}$).

Абсолютното наляганетo може да се зададе и посредством молекулно-кинетичната теория:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{\mu w^2}{2}, \qquad (1.9)$$

където $\boldsymbol{n}$ е концентрация на молекулите (частиците) – брой частици в единица обем, μ - маса на частиците, $\boldsymbol{w}$ - средна скорост на частиците:

$$w = \sqrt{\frac{w_1^2 + w_2^2 + ...}{n}}.$$

Температура

Температурата е термодинамична величина и в механиката на флуидите не е основна величина. Въпреки това тя играе важна роля за процесите на движение на флуидите, тъй като от нея зависят голяма част от характеристиките на флуидите.

Температурата е физическа величина, явяваща се мярка за нагретостта на телата. Тя определя направлението на топлообмена между телата. Ако има две тела **A** и **B**, с температури $\boldsymbol{T_A}$ и $\boldsymbol{T_B}$ и $\boldsymbol{T_A} > \boldsymbol{T_B}$, то при допир между тях, тяло **A** ще отдава топлина, а тяло **B** ще получава топлина. Чрез този физически процес може да се извършва подреждане на телата по тяхната нагретост или температура.

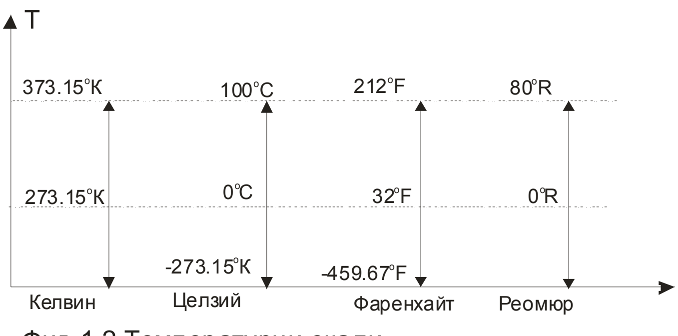
За измерване на температурата не може да се използва еталонна мярка, както е при много други физически величини. Поради това, измерването на температура става посредством други физически параметри, които са пропорционални на температурата. За целта се използва специално вещество или техническо устройство, което се нарича термометрично тяло. То трябва да отговаря на някои важни изисквания:

-физическото свойство, което се използва за измерване на температурата трябва да има регулярна зависимост от температурата. Най-добре е тази зависимост да е линейна.

- термометричното тяло трябва да поглъща малко количество топлина в процеса на измерване, за да не влияе на измерването. Ако се поглъща голямо количество топлина ще бъде променено температурното състояние на измервания обект и измерването няма да бъде точно.

Съществуват различни температурни скали. Съответствието между някои от най-често използваните температурни скали може да бъде изведено от схемата на фиг.1.2:

Основни реперни термодинамични явления, определящи построяването на различните термодинамични скали са фазовите преходи при нормални условия на едно от най-разпространените вещества на земята – водата. За начално на голяма част от скалите се приема температурата на превръщане на водата от твърдо в течно състояние.



Фиг. 1.2 Температурни скали

Ето някои съотношения между температурните скали, които могат директно да се определят от схемата на фиг.1.2:

$T = t^oC + 273{,}15^o$ (преобразуване от скала на Целзий към скала на Келвин)

$T = \frac{5}{9} t^o F + 255{,}37^o K$ (преобразуване от скала на Фаренхайт към скала на Келвин)

$t^o F = 32 \cdot + \cdot \frac{5}{9} \cdot t^o C$ (преобразуване от скала на Целзий към скала на Фаренхайт)

Температурата за идеални газове може да се представи и посредством апарата на молекулно-кинетичната теория:

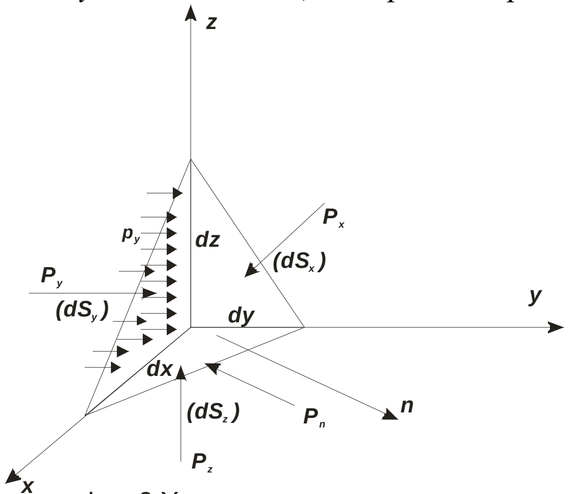
$$T = \kappa \cdot \frac{2}{3} m \frac{w^2}{2},$$

където κ е коефициент, а m и w са масата и скоростта на частиците на веществото (газа).

Хидростатично налягане

В дадена точка на флуидното пространство могат да се построят безброй равнини с различна ориентация. Във всяка от тези равнини действат повърхностни сили (налягания). Ако флуидът е в равновесие, тези налягания ще са само нормални. Съществен е въпросът как се променя налягането за различните повърхнини минаващи през дадена точка.

За определяне на налягането в различните повърхнини (площадки) се разглежда безкрайно малък тетраедър със страни ***dx, dy, dz***. Той има 4 страни: площадка перпендикулярна на ос *x*, която има площ $dS_x = dy.dz$; площадка перпендикулярна на ос *y*, която има площ $dS_y=dx.dz$; площадка перпендикулярна на ос *z*, която има площ $dS_z=dy.dx$ и площадка, затваряща тетраедъра с нормала към повърхността *n* и площ dS_n.



Фиг. 3 Хидростатично налягане

Повърхностните сили зависят от налягането p_x, p_y, p_z *и* p_n и площта (dS_x, dS_y …..). Масовите сили се определят от специфичната масова сила ***F*** и от обема ***dV=dx . dy . dz***. Когато безкрайно малките величини ***dx , dy, dz*** се оставят да клонят към нула ($\rightarrow 0$), то обемът V клони към нула ($V\rightarrow 0$), по-бързо от S (защото се определя от произведението на три безкрайно малки величини). От математиката е известно, че при преход към нула на даден израз в който има безкрайно малки величини, променливите с по-голям порядък на безкрайно малки величини (по-висока степен) могат да се пренебрегнат. Тъй като повърхностните сили се определят от безкрайно малки величини от втори порядък (dS_x, dS_y ….), а масовите сили от величини от трети порядък те могат да се пренебрегнат. Условието за равновесие на силите действащи на флуида означава, че сумата от проекциите на всички сили върху отделните оси трябва да е нула:

Условия за равновесие:

$$\Sigma X = 0 \rightarrow P_x = P_n \cdot \cos(n.x)$$
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow P_y = P_n \cdot \cos(n.y) \qquad (2)$$
$$\Sigma Z = 0 \rightarrow P_z = P_n \cdot \cos(n.z)$$

Където P_x, P_y, P_z са силите действащи в площадки dS_x, dS_y …, а P_n – сила действаща в площадка dS_n.

Налягания в различните площадки се определя от изразите:

$$p_x = \frac{P_x}{S_x} = \frac{P_n.\cos(n.x)}{S_x} \qquad\qquad p_n = \frac{P_n}{S_n}$$

$$p_y = \frac{P_y}{S_y} = \frac{P_n.\cos(n.y)}{S_y}$$

$$p_z = \frac{P_z}{S_z} = \frac{P_n.\cos(n.z)}{S_z}$$

Площадките в координатните повърхнини $\boldsymbol{dS_x}$, $\boldsymbol{dS_y}$, $\boldsymbol{dS_z}$ се явяват проекции на площадката dS_n в съответните координатни равнини:

$\boldsymbol{S_x = S_n \, . \, cos\,(x.n)\; ; S_y = \ldots\ldots; S_z = \ldots\ldots}$

След заместване в уравненията за равновесие (2) се получава:

$\boldsymbol{p_x = p_n;\;\; p_y = p_n;\;\; p_z = p_z.}$

От тези равенства се получава окончателно:

$$\boldsymbol{p_x = p_y = p_z = p_n} \qquad (3)$$

Това равенство може да се тълкува по следния начин: налягането във всички площадки минаващи през дадена точка от флуидното пространство на флуид, намиращ се в равновесие е еднакво. Това налягане се нарича **хидростатично налягане**.

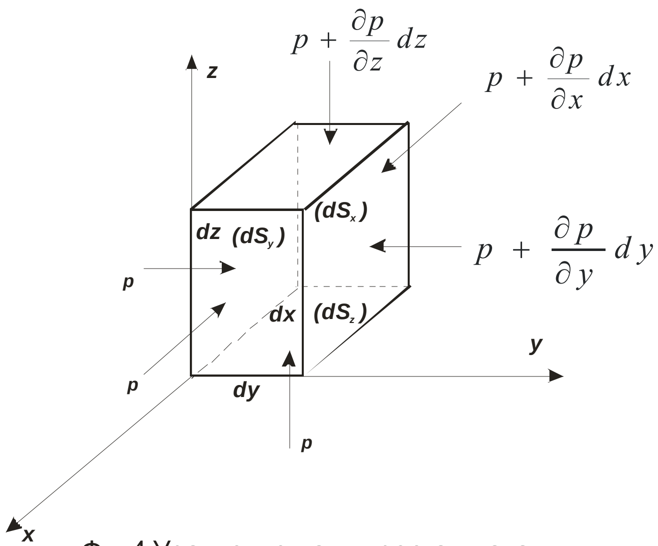
При флуидите в равновесие поради липсата на тангенциални напрежения в произволна точка на флуидния обем налягането по всички направления остава еднакво и не зависи от ориентирането на лицевия елемент в пространството, по който то действа в дадената точка. То се характеризира само с големината си, която в дадена точка на флуидния обем и във фиксиран момент от време има напълно определена стойност. Следователно налягането може да се разглежда като скаларна величина, която е функция само на координатите и времето, т.е.

$$\boldsymbol{p = p(x, y, z, t).}$$

Разгледаното свойство на флуидите в равновесие се отнася и за движение на идеалните флуиди. При движението на реалните флуиди обаче се появяват тангенциални напрежения, в резултат на които налягането в произволна точка не е еднакво и зависи от направлението на лицевия елемент, върху който е приложено.

Основно уравнение на хидростатиката

Диференциалното уравнение на хидростатиката установява зависимостта на налягането в произволна точка във флуидното пространство от характера на действащите във флуида масови и повърхностни сили. За получаване на това уравнение се разглежда равновесието на елементарен флуиден обем с форма на паралелепипед (фиг.4) с дължина на ръбовете ***dx, dy, dz,*** Тъй като флуидът е в равновесие (неподвижен) силите действащи този елемент трябва да са в равновесие. Тогава елементът се намира в относителен покой (равновесие) спрямо околното флуидно пространство.



Фиг.4 Уравнение на хидростатиката

Нека върху единица маса от паралелепипеда да действа масовата сила ***F*** (1) с компоненти ***X, Y, Z***. Ако по трите стени,пресичащи се в точка O, действа налягане ***p*** (хидростатично налягане), то по съответните противоположни стени на паралелепипеда налягането ще бъде

$$(p+\frac{dp}{dx}dx)dy.dz.....(p+\frac{dp}{dy}dy)dx.dz.....(p+\frac{dp}{dz}dz)dx.dy$$

Тези стойности са в сила, когато изменението на дадена величина е линейно. Тъй като се разглежда безкрайно малък елемент, изменението на физическите величини се приема за линейно в този много малък интервал (физическите параметри не могат да претърпят големи изменения за кратко време).

Равновесието на елемента се записва като се положат нула сумите от компонентите на всички сили по съответните оси.

Например за проекциите на силите по ос x може да се запише:

$$\left[p-(p+\frac{dp}{dx}dx\right]dy.dz+\rho.X\cdot dx.dy.dz=0 \quad \text{или} \quad \left[\frac{dp}{dx}dx\right]dy.dz+\rho.X\cdot dx.dy.dz=0$$

При по-нататъшното опростяване се получава:

$$\frac{dp}{dx}=\rho\cdot X \quad \text{или} \quad X=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

Аналогично за проекциите по другите оси се получава:

$$Y=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} \qquad Z=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}$$

Тези уравнения могат да се запишат във вида:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=0;Y=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=0;Z=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=0 \tag{5}$$

Тъй като масовата сила се представя във векторен вид като: ***F*** = ***X***.***i*** + ***Y***.***j*** + ***Z***.***k*** където ***i, j, k*** са единичните вектори по осите ***x, y, z***, а векторната функция ***grad*** (градиент) има вида:

$$\frac{dp}{dx}\vec{i}+\frac{dp}{dy}\vec{j}+\frac{dp}{dz}\vec{k}=gpad\cdot p\,,$$

то горните уравнения могат да се запишат във векторен вид:

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{1/\rho}\ grad\ \boldsymbol{p}$. (6)

В това уравнение $\boldsymbol{F}$ е вектор на специфичната масова сила (1). Ако то се запише като уравнения на съответните компоненти на векторите ще се получат три отделни уравнения, които ще са точно уравнения (5).

Горното уравнение може да се запише в още една форма (посредством потенциала на масовите сили). За целта се извършват следните операции:

1. умножават се уравнения (1) съответно с dx, dy, dz
2. събират се левите и десните страни на получените равенства:

$$\rho(x.dx + y.dy + z.dz) = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz\ , \qquad (7)$$

От математиката е известно, че пълен диференциал на дадена функция се представя като:

$$dp = \frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz$$

Следователно дясната част на (7) е пълен диференциал и лявата част също трябва да е пълен диференциал на някаква функция. Ако се означи тази функция като $\varphi = \varphi(x,y,z)$ и функцията е такава, че:

$$\boldsymbol{X = \partial\ \varphi/\partial\ x\ ;\ \ Y = \partial\ \varphi/\partial yx\ ;\ \ Z = \partial\ \varphi/\partial\ z\ ;}$$

То лявата част може да се запише като пълен диференциал:

$$\boldsymbol{d\varphi = (X.dx + Y.dy + Z.dz)}$$

или уравнението приема вида:

$$\boldsymbol{\rho d\varphi = dp} \qquad (8)$$

Това е запис на уравнението на хидростатиката в диференциална форма.