Лекция 4
<u>Кинематика на флуидите</u>

Кинематиката е раздел от механиката на флуидите, в който се разглеждат общите закони на движение, без да се анализират причините, които го пораждат. Кинематиката на флуидите за разлика от твърдите тела не може да се отдели изцяло от динамиката им. Това се дължи на обстоятелството, че при движението на определен флуиден обем разпределението на масата в него с течение на времето се изменя, което от своя страна оказва влияние на разпределението на скоростта и ускорението на флуидните частици. Ето защо в кинематиката на флуидите се налага заедно с чисто кинематични характеристики на движението да се разглеждат и динамични понятия като маса и плътност.

За разлика от теоретичната механика, в която се изучава движението на абсолютно твърди тела, в кинематиката на непрекъснатите среди се изучава движението на деформируеми тела, в процеса на който се изменят тяхната първоначална форма и разстоянието между частиците им. Особеност при флуидите е, че съставните им частици са лесноподвижни една спрямо друга и дори при наличие на постъпателно движение те могат да имат различни скорости и ускорения. Следователно полето на течението трябва да се описва от векторите на скоростта и ускорението на флуидните частици в различните точки на изследвания обем, респ. пространство. Това от своя страна показва, че една от основните задачи на кинематиката е определянето на големината и посоката на скоростта и ускорението във всяка точка и за всеки момент от време, а въз основа на тях разпределението на налягането и плътността. Очевидно е, че тези кинематични величини са функции на времето и координатите на пространството, и то непрекъснати и диференцируеми, което свойство е общо за флуидите и се отнася за всяка непрекъсната среда.

Математично описание на теченията

Съществуват два метода за изучаване на движението на частиците на флуидните среди. Единият от тях, наречен метод на Лагранж, се състои в изследване на движението в пространството на отделните флуидни частици, т.е. изучава се пътят, изминат от частиците във функция на времето. Тъй като флуидните частици са безкрайно много, за фиксиране на индивидуалните им траектории в пространството е необходимо в някакъв начален момент t_0 да се зададат координатите на всяка определена частица x_0, y_0, z_0 и след това да се следи движението в пространството. Или казано по друг начин, от безкрайното множество траектории на дадената частица ще принадлежи тази, която минава през точката, определена с началните й координати. По този начин движението се задава от положението на частиците във функция на времето и техните начални координати.

Както е известно, уравнението за движение на дадена частица представя математическото описание на траекторията на частицата. Чрез определяне на първата и втората производна на пътя по времето t се определят скоростта и ускорението на частиците.

Методът на Лагранж, наречен още субстанциален (индивидуален), е обичаен за класическата механика. Спецификата на флуидите се задава чрез въвеждане на координатите r_0, които индивидуализират отделните частици. Те се наричат Лагранжеви координати.

Методът на Лагранж изучава движението на отделните частици по дължината на траекторията им: $r = f(t)$. За фиксиране на траекторията на коя да е частица в някакъв начален момент t_0 се задават координатите на частицата $\vec{r}(x_0, y_0, z_0)$ и след това се следи движението на частицата. Следователно, движението се задава с положението на частицата в началния момент:

$$\vec{r} = f(\vec{r}_0, t)$$

Задачата на механиката на флуидите в този случай се свежда до определяне на траекторията на частицата и съответно скоростите и ускоренията й:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Метод на Ойлер

При този метод се разглежда не конкретна частица от флуида, а точки от флуидното пространство. Разглежда се например, с каква скорост различни флуидни частици в различни моменти от време преминават през дадена точка от флуидното пространство (течение). Всяка точка от това пространство се фиксира с координата (x, y, z). За всяка точка се задава скоростта ***V*** на частиците преминаващи през нея. В този случай задачата се свежда до определяне на вектора на скоростта на флуидните частици във функция на времето t и координатите x, y, z на точките на пространството. По този начин се задава скоростното поле в координатната система на флуидното течение. Параметрите ***x, y, z, t*** се наричат Ойлерови променливи. Следователно по метода на Ойлер, наречен още локален метод, движението на флуида се задава със скоростното поле.

Тук трябва да се отбележи, че ***V*** не е скоростта на някоя набелязана флуидна частица, а скоростта, с която различните флуидни частици преминават през разглежданата точка от пространството в течение на времето:

$\vec{V} = f(x, y, z, t)$, което е скоростното поле на течението.

За по-пълно описание на флуидното течение е необходимо да се познава и функцията на налягането, а при свиваемите флуиди и функцията на плътността.

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Докато по субстанциалния метод координатите на движещите се флуидни частици са функция на времето, по локалния метод скоростта на частиците в различните точки се определя като функция на времето. Следователно по метода на Лагранж координатите x, y, z са зависими променливи, а по метода на Ойлер те са независими променливи, в което се състои основната разлика на двата метода. За математичното описание на теченията по-нататък е използван само методът на Ойлер.

Съгласно с метода на Ойлер движението на непрекъснатите среди се характеризира със скоростта на частиците им, която във всеки момент от време е определена по големина и направление. Следователно в изучаваното флуидна пространство във всеки момент и във всяка точка може да се построи векторът на скоростта. Съвкупността от тези вектори образува скоростното поле, което дава моментна картина на разпределението на скоростта.

Различават се няколко вида течения. Ако скоростното поле остава постоянно (неизменно) с течение на времето, т.е. ако скоростите във всяка точка от флуидното пространство не зависят от времето, течението се нарича установено или стационарно. Тогава скоростната функция се опростява във вида ***V = V(x, y, x)***. В най-общия случай, когато скоростното поле се изменя с времето, течението се нарича неустановено или нестационарно и следователно ***V = V(x, y, z, t)***.

Един вид неустановено течение е т.нар. изоморфно или полуустановено, при което скоростите се менят с времето само по големина, но запазват направлението си. Такива могат да бъдат променливите по дебит течения в тръби и канали.

Има и течения, при които скоростите в отделните точки се изменят с времето по големина и направление, но в сравнително по-големи интервали от време имат постоянни средни стойности. Това са т.нар. установени по средна стойност или квазистационарни течения, за които средната по време скорост в произволна точка на течението се определя по израза

Токови линии и картини

По аналогия на силовите линии в силовите магнитни полета за онагледяване на скоростните полета се използват токови линии. Това са въображаеми линии, явяващи се геометрично място на точки в пространството, в които скоростните вектори в даден момент имат направление на съответните допирателни към линиите. За всяко скоростно поле може да се построи семейство от токови линии (ТЛ), които показват направлението на ФЧ. За математическото описание на токовите линии се използва колинеарността на векторите на скоростта $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ и нарастването на радиус-вектора $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

Това математически означава, че векторното произведение на двата вектора е нула или има пропорционалност на компонентите на двата вектора:

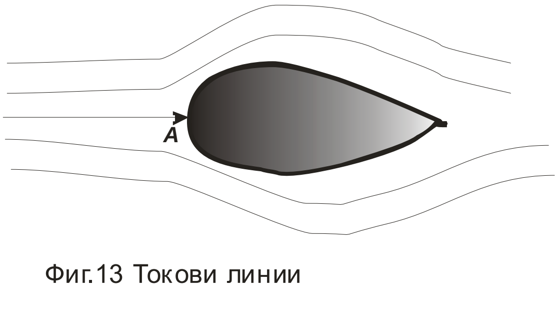
$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \qquad (13)$$

По същество токовите линии се различават от траекториите на флуидните частици. При неустановените течения скоростта в отделните точки на флуидното пространство се мени с времето по големина и направление, откъдето следва, че токовите линии ще изменят формата си. В такива случаи може да се говори само за моментни токови линии, които не съвпадат с траекторията на флуидните частици. При установените течения във всяка точка от пространството скоростта е постоянна по големина и направление и токовите линии остават непроменени в течение на времето и следователно представляват и траектории на флуидните частици.

Обикновено през всяка точка на флуидното течение може да се прекара само една токова линия. Изключение правят специални (особени) точки, в които се пресичат повече от една токови линии. Това от своя страна предполага движението на флуидните частици в особените точки да има едновременно различни направления, от което следва очевидно, че скоростта в тези точки може да бъде или нула, или безкрайност.

На фиг. 13 е показано обтичане на твърдо тяло. Точката А, намираща се на нулевата токова линия по контура на обтичаното тяло е особена. В тази точка, наречена още критична или точка на заприщване, скоростта е равна на нула.



Фиг.13 Токови линии

Повърхнини, чиито образователни са токови линии, се наричат токови повърхнини. Тъй като в точките на токовите линии няма напречни компоненти (скоростта е насочена по посока на движението), то през токовите повърхнини не преминава флуид (няма напречна компонента на скоростта).

Повърхнина, образувана от токови линии, преминаващи през затворен контур, образува токова тръбичка, а флуидът, който тече в тези токови тръбички, се нарича токова нишка.

Токови картини

Съвкупността от голям брой токови линии се нарича токова картина. Освен по теоретичен път, токови картини могат да се получат и опитно, визуално. Видимостта се постига чрез прибавяне на малки, твърди оцветени частици, чрез друг флуид (оцветен) или чрез оцветяване на самия флуид. По този начин токовите картини могат да се наблюдават и да се фотографират за изследване на характера на движението.

Ускорение на ФЧ

Ускорението на флуидните частици се определя като частни производни на скоростта по отношение на времето (втора производна на пътя по времето):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

Но от своя страна $V = f(\vec{r}, t)$ или освен функция на времето скоростта е и функция на пространствените променливи – сложна функция. Тъй като $\vec{r} = f(t)$, то за производната по времето се получава:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial r} . \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} . \frac{\partial z}{\partial t}$$

От своя страна производните на компонентите на радиус вектора по времето са съответните компоненти на скоростта:

но $\frac{\partial x}{\partial t} = u; \frac{\partial y}{\partial x} = v; \frac{\partial z}{\partial t} = w$

Тогава за ускорението се получава:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \qquad (14)$$

Във векторна форма изразът за ускорението може да се запише с използване на познатия от векторното смятане оператор на Хамилтон (оператор ‘набла’):

$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$, който има форма на вектор, но се използва само за записване на специфични операции, тъй като компонентите му не са стойности, а операции за диференциране. С негова помощ ускорението може да се запише във вида:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}.\vec{\nabla})\vec{V} \qquad (15)$$

Аналогични записи могат да се направят и за другите параметри на флуидното течение – например за температурата на флуида:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}(\vec{V}.\nabla)T$$

Първият член от записа в (14) изразява промяна на скоростта по времето в произволна точка от ФП (местното изменение) и се нарича локално ускорение. За установени течения то е 0.

Останалите членове на уравнението характеризират изменението на скоростта на ФЧ при преместването им в пространството и се наричат конвективно ускорение.

Проекции на ускорението по трите оси на координатната система:

$$a_x = \frac{du}{dt} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} \qquad (16)$$

$$a = \frac{dw}{dt} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}$$