Лекция 6
<u>Динамика на флуидите</u>
<u>Общи уравнения за движение на непрекъснати среди (флуиди)</u>

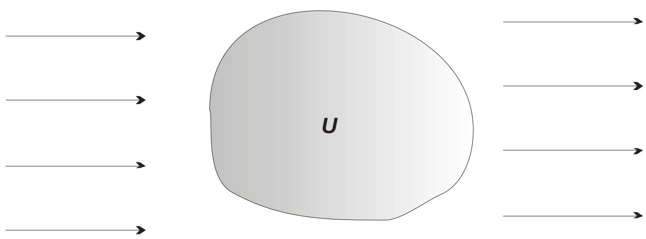
За механиката на флуидите важат общите закони на механиката. Особено значение за теоретическите анализи имат законите за съхранение (запазване). Законите за съхранение (запазване) важат за почти всички явление във физиката (на микромира и макромира, квантовата механика, теорията на относителността). Това са универсални закони и се отнасят за съхранение на: енергията, количеството на движение (импулса), момента на количеството на движение. В класическата физика (за скорости $\boldsymbol{v} \ll \boldsymbol{c}$) важи и законът за съхранение на масата.

Прилагането на законите за съхранение (ЗС) към движещи се флуиди дава система уравнения за движение на флуидите. Записани за обеми с крайни размери законите за съхранение дават общи интегрални уравнения за движение. Записани за безкрайно малки обеми те задават системи диференциални уравнения за движение на флуиди

<u>Закон за съхранение на масата. Уравнение на непрекъснатостта</u>

За изолирани системи в които не се обменя маса с околната среда масата $\boldsymbol{m}$ остава постоянна (маса не се губи и не се създава). Това се записва като производната на масата по времето се нулира: $\frac{dm}{dt} = 0$

За неизолирана система с постоянен обем U, през повърхността на която се влива и изтича флуид (фиг.17) могат да се запишат уравнения, които се основават на закона за запазване на масата.



Фиг.17. Закон за запазване на масата

Най-напред, изменението на масата в обема се обуславя от промяната на плътността на флуида в дадената област:

$\Delta m = \int_U \frac{\partial \rho}{\partial t} dU$, където $\boldsymbol{dU}$ е безкрайно малък обемен елемент, а $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ е изменение на плътността във времето. Горният израз дава изменението на масата за единица време.

От друга страна, може да се разгледа потокът на вектора $\rho \vec{V}$ през неподвижната повърхнина, затваряща обема U (на фигурата). Ако количеството вливащ се флуид не е равно на изтичащото, масата на флуида в обема се променя. Потокът на флуида може да се определи по познатия израз за поток на вектор (17):

$\Delta m = \int_S \rho V_n ds$ - поток на вектора на скоростта.

Тъй като изменението на масата в обема U се обуславя от изменение на плътността (няма загуба и раждане на маса), това изменение е възможно само за сметка на изтичане или втичане (поток на флуида през ограждащата повърхнина):

$$\Delta m = \int_S \rho V_n ds = -\int_U \frac{\partial \rho}{\partial t} dU \ . \qquad (28)$$

Знака '-' се определя от математическото значение на векторната операция 'поток на вектор'. За положителна стойност на потока се приема случая, когато скоростта има посока съвпадаща с посоката на външната нормала към повърхността. Това означава, че положителната стойност на потока отговаря на изтичане от обема. В същото време, изтичане от обема означава намаляване на плътността вътре в областта (отрицателна стойност на производната на плътността по времето). За да се съчетаят знаците на величините в двете страни на равенството е необходим знак '-' пред един от двата интеграла.

Към израза (28) може да се приложи формулата на Остроградски-Гаус:

$$\int_S \rho V_n ds = \int_U div(\rho V) ds = \int \left[\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dU$$

$$\int_V div(\rho \vec{V}) dU = -\int_U \frac{\partial \rho}{\partial t} dU$$

$$\int_U \left[(div(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dU = 0$$

Тъй като обемът е произволен и обемният интеграл е 0 то подинтегралната величина трябва да е 0 навсякъде по обема:

$$div(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (29)$$

Това е уравнението за запазване на масата записано в общ вид. То е известно още и като ***уравнение на непрекъснатостта.***

За различните типове движение уравнението на непрекъснатостта може да се представи в зависимост от особеностите и характеристиките му:

- за стационарно движение производната на плътността по времето е нула: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$;

тогава: $div \rho \vec{V} = 0$

- за несвиваеми флуиди (и стационарни условия) е в сила: ***ρ = const*** и тогава уравнението на непрекъснатостта има вида: $div\vec{V} = 0$. Подробния запис има вида:

$$divV = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

Общото уравнение на непрекъснатостта може да се напише и във вида:

$$\rho div\vec{V} + \vec{V} grad \rho = 0$$

<u>Сили, действащи в движещи се флуиди</u>

Силите действащи върху движещи се флуиди се различават от тези действащи в неподвижен флуид поради наличието на деформация и вътрешното хидравлично съпротивление. Това обуславя наличието на тенгенциални компоненти на повърхностните сили.

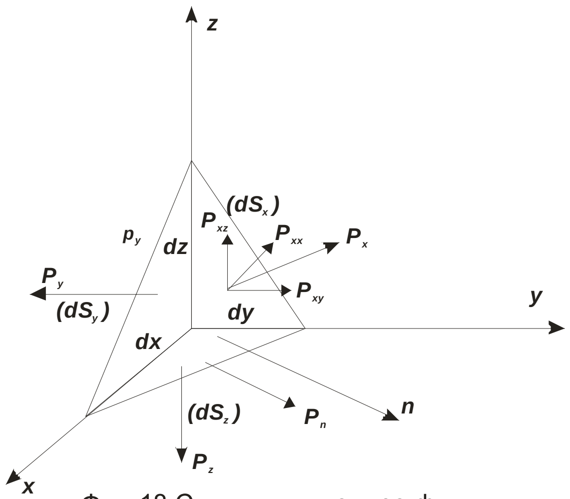
Силите, които действат в движещ се флуид могат да се дефинират на основата на закона за съхранение на импулса (от механиката):

$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{dm \cdot \vec{V}}{dt} = m\frac{dV}{dt} = \vec{R}$, където ***K = m.V*** е механичен импулс (количество на движението), R - равнодействаща на приложените сили;

За неизолирана система (върху която действат външни сили) законът за съхранение на импулса има вид:

$\frac{d\vec{K}}{dt} - \vec{R} = m\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{R} = 0$ - запис във вида на Даламбер

Този закон може да се приложи към елементарен тетраедър в произволно ориентирана координатна система (фиг.18)



Фиг. 18 Сили в движещ се флуид

За този елемент може да се запише:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d\vec{V}_c}{dt} m$$

където $\boldsymbol{V_c}$ е вектор на скоростта на центъра на инерция на тетраедъра, ***dm*** – маса на тетраедъра.

Главният вектор на външните сили (второто слагаемо в израза за съхранение на импулса) е сума на масовите и повърхностни сили:

$$\vec{R} = \vec{R}_m + \vec{R}_p$$

Векторът на масовите сили има вида:

$\vec{R}_m = \vec{F} \cdot dm$, където $\vec{F}$ е векторът на специфичната масова сила (силата за единица маса) и $\vec{R}_m = \vec{F}.\rho \cdot dU$.

Главният вектор на повърхностните сили (равнодействащата на повърхностните сили) е:

$\vec{R}_p = \vec{p}_n ds_n - \vec{p}_x ds_x - \vec{p}_y ds_y - \vec{p}_z s_z$, където $\boldsymbol{p_i}$ е вектор на напреженията, приложен към елементарната площадка $\boldsymbol{S_i}$.

Тогава законът за съхранение на импулса се записва като:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} dm - \vec{F} dm - \vec{p}_n ds_n + \vec{p}_x ds_x + \vec{p}_y ds_y + \vec{p}_z ds_z = 0$$

В това равенство в първите два члена има величини с по-висок порядък на безкрайно малки величини (***dm ~ dx.dy.dz***). При преход към нула на безкрайно малките величини $dx, dy, dz \to 0$, тези слагаеми се пренебрегнат тъй като намаляват с по-голяма скорост от другите слагаеми. Тогава:

$$\vec{p}_n ds_n = \vec{p}_x ds_x + \vec{p}_y ds_y + \vec{p}_z d_z \qquad (30)$$

Косинус-директорите на нормалата към затварящата повърхнина ***n*** имат вида:

$$n_x = \cos(n \wedge x)$$

$$n_y = \cos(n \wedge y)$$

$$n_z = \cos(n \wedge z)$$

Тогава елементарните повърхнини от тетраедъра в съответните координатни равнини могат да се изразят по следния начин (те са проекции на площадката dS_n):

$$ds_x = ds_n.\cos(n \wedge x) = n_x ds_n$$

$$ds_y = ds_n.\cos(n \wedge y) = n_y ds_n \quad \text{и} \qquad \vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$$

$$ds_z = ds_n.\cos(n \wedge z) = n_z ds_n$$

След заместване в горния израз и съкращаване на ds_n уравнение (30) може да се запише във вид на компоненти по координатните оси:

$$\left\| \begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{aligned} \right. \qquad (31)$$

където $\boldsymbol{n_x, n_y, n_z}$ са косинус-директори, $\boldsymbol{p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}}$ – нормални напрежения; $\boldsymbol{p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}}$ – тангенциални напрежения;
Тангенциалните напрежения се индексират по площадката в която действат и оста върху която се проектират. Например p_{xy} е тангенциално напрежение с проекция по оста y, действащо в площадка перпендикулярна на оста x.
Пълното напрежение в произволна площадка може да се представи линейно чрез проекциите на напреженията в три взаимноперпендикулярни площадки. Или:

$$p = \begin{Vmatrix} p_{xx}\, p_{xy}\, p_{xz} \\ p_{yx}\, p_{yy}\, p_{yz} \\ p_{zx}\, p_{zy}\, p_{zz} \end{Vmatrix} \qquad (32)$$

Това е тензорна величина и се нарича тензор на напреженията (наляганията)
В механиката на флуидите се доказва че: $p_{xy} = p_{yx}; p_{xz} = p_{zx}; p_{yz} = p_{zy}$

Уравнения за движение на флуиди

Уравненията за движение на флуиди се получават на основата на закона за съхранение на импулса и закона за съхранение на момента на импулса. В общ вид законът за съхранение на импулса има вида:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} - R = 0$$

За да се получат диференциалните уравнения за движение на флуиди законът за съхранение на импулса трябва да се запише за безкрайно малък обем движещ се флуид.
Тъй като $\boldsymbol{dm = \rho.dU}$ и $\boldsymbol{dK = dm.\ V = \rho.dU.V}$, за съхранение на импулса за краен обем от флуида U може да се запише:

$$\frac{d}{dt}\int_U \rho\cdot\vec{V}\cdot dU - \int_U \rho\cdot\vec{F}\cdot dU - \int_S \vec{p}_n ds = 0,$$

където действащите във флуида сили са $\vec{R} = \int_U \rho\cdot\vec{F}\cdot dU - \int_S \vec{p}_n ds = 0$ (сума от масовите и повърхностни сили)
Първото слагаемо може да се преобразува по следния начин ако се приеме, че масата не се изменя във времето:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_U \rho\cdot\vec{V}\cdot dU = \int_U \rho\frac{d\vec{V}}{dt}dU = \int_U \rho\cdot\vec{W}\cdot dU\ , \qquad (33)$$

където $\vec{W}$ е ускорението на флуидните частици.
За последното слагаемо може да се приложи формулата на Гаус-Остроградски:

$$\int_S P_n ds = \int_S (n_x\vec{p}_x + n_y\vec{p}_y n_z\vec{p}_z) = \int_U (\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z})dU$$

Тогава уравнение (33) може да се запише във вида:

$$\int_U \left[\rho\cdot\vec{W} - \rho\cdot\vec{F} - (\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z})\right]dU = 0$$

Тъй като U е произволен обем, за да е горният интеграл нула трябва подинтегралната функция да е нула навсякъде в областта:

$$\rho\cdot\vec{W} - \rho\cdot\vec{F} - (\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}) = 0 \qquad (34)$$

Във векторна форма това уравнение може да се запише по следния начин:

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = \rho\cdot\vec{F} + grad(\vec{P}) \qquad (35)$$

Във форма на проекции по координатните оси уравнението има вида:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho\cdot X + (\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z})$$

$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho\cdot Y + (\frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z}) \qquad (36)$$

$$\rho\frac{dw}{dt} = \rho\cdot Z + (\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z})$$

Това е система уравнения за движение на флуидите.

Закон за съхранение на момента на импулса

Законът за съхранение на момента на импулса се формулира по следния начин: сумата от векторната производна на момента на импулса и момента на външните сили по време на движението на флуида остава равна на нула:

$\frac{d\vec{L}}{dt} - \vec{M} = 0$, където L е момент на импулса за даден обем, M – момент на външните сили спрямо произволна точка.

Ако с $\vec{r}$ се означи радиус – вектора на елементарните обеми dU и площадки ds, то горното равенство се записва като:

$$\int_U \rho\vec{r}x(\vec{W} - \vec{F})dU - \int_S (\vec{r}\cdot\times\cdot\vec{p}_n)ds = 0$$

$$\int_U \left\{\vec{r}\times(\vec{F} - \vec{W})\rho + (\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z}) + \vec{i}_x\times\vec{p}_x + \vec{j}_x\times\vec{p}_y + \vec{k}_x\times\vec{p}_z\right\}dU = 0$$

Съгласно уравнение (34) първата част на горния израз е нула и може да се запише:

$$\vec{i}_x\times\vec{p}_x + \vec{j}_x\times\vec{p}_y + \vec{k}_x\times\vec{p}_z = 0$$

Записвайки този израз с компоненти на векторното произведение се получава:

$$\vec{i}(p_{yz} - p_{zy}) + \vec{j}(p_{xz} - p_{zx}) + \vec{k}(p_{xy} - p_{yx}) = 0$$

За да е равен на нула този вектор е необходимо:

$\boldsymbol{p_{xy} = p_{yx}}$; $\boldsymbol{p_{xz} = p_{yx}}$; $\boldsymbol{p_{zy} = p_{yz}}$

По този начин, законът за съхранение на момента на импулса изисква равенство на компонентите на напрежението с разменени индекси. Това означава, че вместо 9, независимите компоненти в тензора на напрежението са 6.