Лекция 7

Обобщен закон на Нютон

Системата уравнения (36) се основава на закона за съхранение на импулса и съгласно принципите на механиката описва движението на телата. В случая на движение на флуидите тази система съдържа три уравнения, а неизвестните са дванадесет – три компоненти на скоростта и девет компоненти на напреженията (тензора (32)). Когато флуида е свиваем към неизвестните трябва да се отнесе и плътността на флуида. За да може да се решава тази система уравнения трябва или да се добавят допълнителни уравнения или да се редуцира броя на неизвестните.
Най-напред към системата (33) се добавя уравнението на непрекъснатостта (29). Освен това, уравнения (37) дават допълнителни съотношения, с което броят на неизвестните се намалява от 12 на 9. Необходими са допълнителни свързващи уравнения за допълване на системата уравнения за движение на флуидите. Свързващите уравнения се извеждат от механическите свойства на флуидите. Механическите свойства на непрекъснатите среди се задават като връзка между компонентите на тензора на напреженията и кинематичните характеристики, определящи тензора на деформациите.

Връзка между тензора на напреженията на скоростта и деформация

Ако се означи с Π тензора на напреженията, а с S – тензора на деформациите, за да се получи затворена система уравнения за движение на флуиди (уравнения на хидродинамиката) е необходимо да се зададе връзка между тези тензори. Тази връзка се определя за всяка конкретна среда на основата на параметри и характеристики, които задават модела на дадения тип флуиди. Тук се разглежда модел на вискозен флуид, за които напреженията са линейно зависими от деформациите.

Модел на вискозните флуиди

За този модел се приемат следните предпоставки:

1. Ако флуидът е в покой или се движи като твърдо тяло (не се деформира) в него съществуват само нормални напрежения.
2. Флуидът е изотропен – свойствата му са еднакви във всички направления.
3. Компонентите на тензора на напреженията са линейна функция на тензора на скоростта на деформация.

При тези предположения връзката между двата тензора би изглеждала по следния начин:

$$\Pi = 2\mu \cdot S + b \cdot \varepsilon ....(0)\,, \qquad (38)$$

където $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{b}$ са числови константи, а $\boldsymbol{\varepsilon}$ е единичен тензор: $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 1 & \cdot\ 0 & \cdot\ 0 \\ 0 & \cdot\ 1 & \cdot\ 0 \\ 0 & \cdot\ 0 & \cdot\ 1 \end{vmatrix}$. Това е линейна зависимост, в която коефициентът пред тензора S е записан 2.μ за удобство при по нататъшните разглеждания, ***b. ε*** е свободния член в линейната зависимост между тензори (уравнението на права линия е подобно ***y* = *k.x* + *b***). Тази зависимост е обобщение на закона на Нютон за едномерното течение на флуиди (1).

Ако флуида е неподвижен тензора на деформациите се нулира: $S = 0;$. Тогава горното уравнение приема вида: ***Π* = *b. ε***. Това означава, че действат само нормални напрежения, които са еднакви поради условието за изотропност. Тъй като свойството вискозност се проявява само при движение, естествено е да считаме, че напрегнатото състояние в неподвижен вискозен флуид е подобно, както при неподвижен идеален флуид, т.е. на всяка площадка ще действа нормално хидростатично налягане. Освен това, за определяне на неизвестните величини ***μ*** и ***b,*** може да се използва условието (подобно на граничните условия при диференциалните уравнения), уравнението (38) да е в сила и за линейните инварианти на тензорите. От тензорния анализ е известно, че линейните инварианти на тензорите се задават като сума на диагоналните им елементи:

$\boldsymbol{J_\Pi = p_{11} + p_{22} = p_{33}}$ – за тензора на напреженията, и

$$\boldsymbol{J_S = S_{11} + S_{22} + S_{33}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \boldsymbol{div\ V}$$

$\boldsymbol{J\,\varepsilon} = 3$

В граничния случай, записано за първите инварианти уравнение (38) ще има вида:

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = 2\mu \cdot div\vec{V} + 3b \qquad (39)$$

Напрегнатото състояние в подвижен флуид е полезно да може да се представя със скаларна величина, която е аналогична на статичното налягане, като мярка за интензивността на свиване на течността (флуида). В механиката на флуидите се дефинира величина $\boldsymbol{p}$, като налягане действащо в дадена точка на движещ се флуид посредством първата инварианта на тензора П:

$$p = -\frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33}) \qquad (40)$$

Тя е инварианта по отношение на координационната система и затова може да изпълни ролята на статично налягане. Тя е и средна стойност на налягането в три взаимноперпендикулярни площадки. Така може да се дефинира и налягането в движеща се среда – като средното нормално напрежение в три взаимноперпендикулярни площадки, взето със знак (-).

Ако се замести този израз в (39) ще се получи израз за неизвестната величина $\boldsymbol{b}$:

$$\underbrace{b = \frac{1}{3}(p_{11} + p_{22} + p_{33})}_{-P} - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V};\ \text{или}\ b = -p - \frac{2}{3}\mu div\vec{V}$$

След заместване на този израз в (38) последователно се получава:

$$\Pi = 2\mu \cdot S + (-p - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V})\varepsilon$$

$$\Pi = -p\varepsilon + 2\mu \cdot S - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V}\varepsilon$$

$$P_{i\,j} = -p + 2\mu \cdot S_{ij} + \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V}$$

Течностите и газовете се отличават от другите деформируеми среди по това, че в равновесно състояние тангенционалните напрежения в дадена площадка са 0.

При движение на течности и газове – тангенционалните напрежения са зависими от деформациите. За нормалните компоненти се използва обобщеният закон на Нютон (линейна зависимост):

$$\left\| \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V} \\ p_{zz} &= -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \cdot div\vec{V} \end{aligned} \right\| \qquad (41)$$

За тангенциални напрежения: $p_{ij} = \mu(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i})$

Записано в координатен вид:

$$p_{xy} = p_{yx} = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x});$$
$$p_{xz} = p_{zx} = \mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}); \qquad (42)$$
$$p_{yz} = p_{zy} = \mu(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})$$

Течности и газове, които имат механически свойства, описващи се със горните зависимости между напреженията и деформациите се наричат нютонови флуиди. Течности, за които $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = p; p_{xy} = p_{xz} = p_{xy} = 0$, се наричат течности на Паскал. Към тях се отнасят идеалните течности и вискозните течности в покой. Флуиди за които не са в сила горните зависимости се наричат ненютонови или реологически. Те се изучават от отделна наука, която се нарича ***реология***.

Уравнение на движението на свиваеми вискозни флуиди

Като се заместят компонентите на тензора на напреженията (41) и (42) в уравненията за движение на флуидите (36) се получава:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho\cdot X + \frac{\partial}{\partial x}\left[-p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\cdot div\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})$$
$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho\cdot Y + \frac{\partial}{\partial y}\left[-p + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\cdot div\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}\mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})$$
$$\rho\frac{dw}{dt} = \rho\cdot Z + \frac{\partial}{\partial z}\left[-p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\cdot div\vec{V}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\mu(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z}\mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})$$

След малки преобразувания се получава:

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho\cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}(\mu\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu div\vec{V})$$
$$\rho\frac{dv}{dt} = \rho\cdot Y - \frac{\partial p}{\partial y} + 2\frac{\partial}{\partial y}(\mu\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu div\vec{V}) \ ; \quad (43)$$
$$\rho\frac{dw}{dt} = \rho\cdot Z - \frac{\partial p}{\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial z}(\mu\frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu div\vec{V})$$

Към тези три уравнения се добавя уравнението на непрекъснатостта:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = 0 \qquad (44)$$

Системата уравнения (43), (44) е известна като система уравнения на Навие-Стокс. Тя описва движението на вискозни течности и газове. Когато вискозитета се смята за променлива величина, трябва да се зададе зависимостта за изменението (обикновено, като функция на налягането и температурата)

За свиваемите флуиди неизвестни са не само скоростите и наляганията, но и плътността и вискозитета. За пълното описание на движението в този случай трябва да се добавят зависимости между налягането и плътността.

За газовете се използва уравнението за състояние на флуида, което е термодинамично уравнение: $pv = RT; или\,\frac{p}{\rho} = RT$

<u>Уравнение за движение на вискозна несвиваема течност</u>

Горните уравнения са записани в най-общ вид. Те са доста сложни и рядко се използват за анализ на реални флуидни течения. Най-често се правят подходящи опростяващи предположения за опростяване на системата уравнения. По този начин се получават модели на различни течения.

В случая се разглежда изотермично движение (T = const) на вискозна несвиваема течност. Тогава $\mu = const$; $\rho = const$.

Уравнението на непрекъснатостта за несвиваеми флуиди има вида:

$$div\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Като се използва този израз в основните уравнения за движение на флуиди (43) се получава известно опростяване на системата (запис за първото от уравнения (43)):

$$\rho\frac{du}{dt} = \rho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \mu\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) = \rho x - \frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z})}_{0} = \rho x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\nabla^2 u$$

След аналогични преобразования и в другите уравнения на системата за движение на вискозни несвиваеми флуиди се получава:

или: $$\left\| \begin{aligned} &\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u \\ &\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 v \\ &\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w \end{aligned} \right. \qquad (45)$$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор на Лаплас

Заедно с уравнението $div\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, се получава затворена система от 4 уравнения за 4 неизвестни: ***u, v, w, p.***

Във векторна форма тази система уравнения се записва като: $\frac{d\vec{V}}{dt} = F - \frac{1}{\rho}grad p + \nu\nabla^2\vec{V}$

и е известна като уравнения на Стокс.

За решаване на задачата за движение на несвиваеми вискозни флуиди е необходимо да бъдат зададени гранични и начални условия.

Начални условия: t = 0 ***u = f(x, y, z)***

v = f(x, y, z)

w = f(x, y, z)