

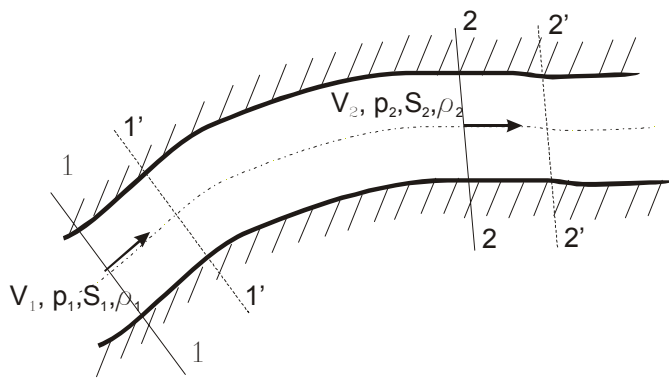
Лекция 9

Едномерно движение на несвиваема течност

1. Основни понятия и уравнения. Елементи на хидравликата

Едномерно течение на флуиди се нарича течение, при което скоростта, налягането, плътността, температурата и други параметри зависят само от една пространствена координата. В действителност такова движение на флуидите не съществува. Но в случаите на движение на течности и газове по тръбопроводи и канали с голяма скорост, максималната скорост е близка до средната в дадено сечение и може да се работи със средна едномерна стойност на скоростта. Тогава теоретическите анализи могат да се правят на основата на едномерно течение на флуида.

Основните уравнения за едномерно движение на несвиваеми течности са уравнението за съхранение на масата, уравнението за съхранение на импулса, момента на импулса и уравнението за съхранение на енергията или уравнение на Бернули.



Фиг.19 Едномерно движение на флуид

За извеждане на основните зависимости при едномерно движение се разглежда течението на течност (несвиваем флуид) в тръба – фиг.19. Предполага се, че стените на тръбопровода са непроникваеми и през страничните стени на тръбата не протича флуид. В зададено сечение (например сечения 1-1, 2-2) параметрите на потока са еднакви, и те се променят само при преминаване от едно сечение към друго.

Масата флуид, протичаща през сечение S за единица време (масовия дебит) е: $\rho \cdot V \cdot S$, където ρ е плътността, а V – скорост на флуида в даденото сечение. Този израз представлява интеграла на потока на вектора на скоростта по сечението S , когато скоростта е постоянна в цялото сечение. Тъй като маса не се губи и не се създава, при стационарни течения трябва във всеки момент дебитът през различните сечения да е еднакъв. Тогава законът за съхранение на масата може да се запише като равенство на дебитите в две или повече сечения от канала:

$$\rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2; \text{ или } \rho \cdot V \cdot S = \text{const} \quad (52)$$

Когато плътността е постоянна величина $\rho = \text{const}$ (несвиваеми флуиди) законът за съхранение на масата се записва във вида:

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \text{ или } V \cdot S = \text{const} \quad (53)$$

Измерителните единици за обем и масов дебити са: $m = \rho V \cdot S \left[\frac{kg}{s} \right]$ и $Q = V \cdot S \left[\frac{m^3}{s} \right]$

Ако се диференцира израза (53) ще се получи уравнението за съхранение на масата (уравнение на непрекъснатостта) в диференциален вид:

$$V \cdot S = \text{const} \Rightarrow S \frac{dV}{dx} + V \frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{V} \frac{dV}{dx} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (54)$$

Ако каналът има постоянна площ на напречното сечение, то: $\frac{dS}{dx} = 0$; и за уравнението

на непрекъснатостта се получава:

$$\frac{dV}{dx} = 0; \Rightarrow V = \text{const} \quad (55)$$

Скоростта в канали с постоянно сечение при стационарни течения на несвиваеми флуиди е постоянна.

Ако скоростта зависи не само от x , но и от времето (нестационарно движение), уравнението за съхранение на масата има вида:

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = 0$$

Уравнение за съхранение на количеството на движение

Законът за съхранение на количеството на движение се записва в общ вид като:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R} \quad (56)$$

където \vec{K} е количество на движението, а \vec{R} – сумарната сила действаща на флуида. При случай на едномерно течение се разглеждат 2 сечения '1-1' и '2-2' с площи S_1 и S_2 . Средните скорости в тези сечения са V_1 и V_2 . Изменението на количеството на движение за време dt се определя от това че обемът между сечения 1-1 и 2-2 се е преместил и заема обема 1'-1' и 2'-2' (фиг.19). Изменението на количеството на движение се определя от увеличаване на импулса между сечения 1-1 и 1'-1' и загубата на импулс между сечения 2-2 и 2'-2' (в обема между сечения 1-1 и 1'-1' има втичане на флуид, а между 2-2 и 2'-2' има изтичане на флуид).

Тогава изменението на количеството на движение е:

$$d\vec{K} = \underbrace{\rho S_1 \vec{V}_1 \vec{V}_1 dt}_{\text{изменение в сечение 1-1}} - \underbrace{\rho S_2 \vec{V}_2 \vec{V}_2 dt}_{\text{изменение в сечение 2-2}}$$

За уравнение (56) се получава:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = m(\vec{V}_1 - \vec{V}_2); \Rightarrow m\vec{V}_1 - m\vec{V}_2 = \vec{R}$$

Уравнение за запазване на енергията (уравнение на Бернули)

Използвайки уравнението за съхранение на енергията се извежда уравнението на Бернули за едномерно течение в тръби и канали. Приемайки, че скоростта на флуида в сечението е еднаква, може да се определи преместването на флуида за време dt . За този интервал от време течността от сечение 1-1 се премества в съседно безкрайно близко сечение 1'-1' на разстояние $\vec{V}_1 dt$. За сечение 2-2 преместването е: $\vec{V}_2 dt$. Масата на течността, която се влива и тази която се излива от обема между сечения 1-1 и 2-2 е еднаква: $\rho_1 V_1 S_1 dt = \rho_2 V_2 S_2 dt = m dt$. В този израз с m е означен масовия дебит на течността (масата преминаваща през сечението за единица време)

Пълната енергия на флуидния поток има следните компоненти:

- **кинетичната енергия:** от израза за кинетична енергия в механиката за маса

$m \cdot dt$ се получава: $\frac{m V_1^2}{2} dt$

- **работа на вътрешното налягане:** налягането действащо в дадено сечение упражнява усилие, което предизвиква преместване на течността. В механиката такова действие е свързано с извършване на механична работа: (произведение на силата по преместването)

$$\underbrace{p_1 S_1}_{\text{сила преместване}} \underbrace{V_1 dt}_{\text{преместване}} = \frac{p_1}{\rho} \rho S_1 V_1 dt = \frac{p_1}{\rho} m dt$$

- **потенциална енергия от теглото:** теглото на флуида формира потенциална енергия, която се определя от височината на флуида спрямо някаква начална височина. В зависимост от избора на координатна система трябва се задава координата z на центъра на тежестта на сеченията. Потенциалната енергия за сечение

1-1 има вида: $gmdt.z_1$. Пълната енергия в сечение 1-1 е сума от горните компоненти:

$$\frac{mV_1^2}{2} dt + \frac{p_1}{\rho_1} mdt + gmz_1 dt .$$

За сечение 2-2 пълната енергия е: $\frac{mV_2^2}{2} dt + \frac{p_2}{\rho_2} mdt + gmz_2 dt .$

Ако течността е идеална и няма загуби на енергия в канала и към околната среда енергията в двете сечения трябва да е еднаква:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

Ако течността не е идеална, то ще се реализира някаква загуба на енергия:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta z$$

където Δz - загуба на енергия, отнесена към 1 маса.

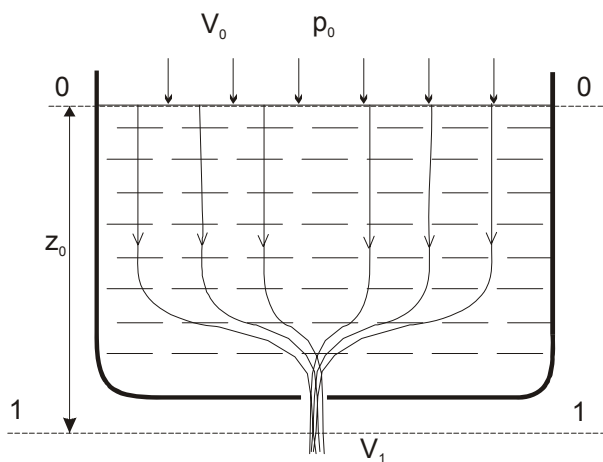
Записано за произволно сечение горното уравнение има вида:

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C_1 \quad (57)$$

То се нарича уравнение на Бернули за едномерно движение на несвиваеми флуиди. Тук то е записано във форма на специфична енергия. Както и за идеални течности то може да се запише за компонентите на налягането и компонентите на напора.

Установено изтичане на несвиваем флуид

Задачата е да се определи скоростта на изтичане и дебитът през малък отвор в отворен съд с течност (фиг.20). При изтичане на течност през отвора обикновено свободното ниво се понижава и течението е неустановено. За да бъде течението установено, необходимо е височината z_0 да остава постоянна. Това може да се постигне като се долива течност с дебит равен на дебита на изтичане. Течението може да се смята за установено и когато сечението на отвора през който изтича флуида е много по-малко от сечението на съда 1-1. Тогаво намаляването на височината z_0 е много бавно и за голям период от време височината може да се смята за постоянна $z_0 = \text{const}$.



Фиг.20. Изтичане на флуид от съд

Характерна особеност за течението са криволинейните токови линии в мястото на отвора и свиването им до известно разстояние след напускането на съда. Най-малкото сечения на струята е в сечение 1-1 (на разстояние дъното на съда). Това се дължи на инерцията при движение на частиците, когато преминават през отвора. След това струята се разширява вследствие на размесването на флуидните частици в свободното пространство.

Стеснението на струята при изтичане се задава с коефициент на свиване (напречна контракция): $\epsilon = S'/S < 1$, където S е сечението на отвора, а S' най-малкото сечение на струята. Този коефициент се определя опитно и зависи от формата и

местоположението на отвора и от критерия на Рейнолдс: $Re = \frac{V.d}{\nu}$. Тук V е скоростта на изтичане, d - диаметър на отвора и ν - кинематичен вискозитет на течността.

При изтичането всички токови линии започват от откритата свободна повърхност (сечение 1-1) за която $z_0 = \text{const}$, налягане $p = p_0$ (атмосферно налягане) и скорост (ако се приеме, че течението е установено) $V_0 = 0$. Непосредствено след отвора налягането по напречното сечение е постоянно и равно на действащото по повърхността на струята външно налягане, в случая равно на атмосферното налягане. Тогава уравнението на Бернули за сечения 0-0 и 1-1 може да се запише във вида:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{g\rho} + z_1 = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{g\rho} + z_0$$

Като се вземе пред вид, че $V_0 = 0$ и ако се положи $h = z_0 - z_1$ скоростта на изтичане се получава:

$$V_1 = V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho} + 2gh} \quad (58)$$

При отчитане на факта, че налягането на изтичане е равно на атмосферното $p_1 = p_0$ горният израз се опростява значително:

$$V = \sqrt{2gh} \quad (59)$$

Тази зависимост е известна в хидродинамиката като уравнение на *Торичели*.

Вследствие на хидравличното съпротивление при изтичане на флуида, скоростта на изтичане на реални флуиди е по-малка от тази изчислена с израза (59). В този случай за действителната скорост на изтичане се държи сметка чрез тъй наречения скоростен коефициент $\varphi < 1$:

$$V = \varphi \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho} + 2gh}$$

Този коефициент зависи от формата и големината на отвора, а също така и от критерия на Рейнолдс за струята на изтичане. Това особено важи за изтичания за които $Re < 10^5$. Този коефициент се определя опитно, като числените му стойности са в границите $\varphi = 0.84 \div 0.99$.

Дебитът на изтичащия флуид с отчитане на хидравличното съпротивление и стеснение на струята се определя от израза:

$$Q = V \cdot S' = \varphi \varepsilon \sqrt{2gh} = \mu \sqrt{2gh}$$

където $\mu = \varphi \varepsilon$ се нарича коефициент на дебита.