Лекция 6

Втора част. Основни принципи на топлопреноса

Увод

Ако в пространството възникне температурна разлика, енергията се пренася от област с по-висока към области с по-ниска температура. В съответствие с концепциите на термодинамиката, енергията, която се пренася вследствие на температурната разлика се нарича топлина.

Термодинамиката изучава явленията на пренасяне на топлина само в равновесни системи. Там се определя енергийния баланс в процеса и се установяват параметрите на системата в крайното състояние. Следователно, термодинамиката има задача да определи какво количество топлина е необходима за прехода на една система от едно равновесно състояние в друго. Тя не държи сметка за времето, което е необходимо за този преход, за скоростта на пренасяне на топлината и изменението на тази скорост. Тези въпроси са предмет на теорията на топлопреноса.

Пример: един прът поставен във вода с по-висока температура поглъща топлинна енергия от водата. По термодинамичен път може да се определи температурата до която ще се нагрее пръта и количеството пренесена топлина в процеса. Неизвестни остават обаче времето и скоростта на тези процеси. Теорията на топлопреноса дава отговор на тези въпроси.

Съществуват три механизма за топлопренос: топлопроводност, конвекция и излъчване.

11. Топлопроводност (кондуктивен пренос на топлина)

Топлопроводността се явява единственият механизъм за пренасяне на топлина в твърди, непрозрачни тела (материали). Проявява се при преноса на топлина и в други среди, но там не е единствен механизъм и се съпровожда с някои от другите механизми на пренос на топлина. За топлопроводността във всички случаи е необходима материална среда (обуславя се от микроскопичния характер на веществата).

11.1. Температурно поле. Топлинен поток. Закон на Фурие

Под температурно поле се разбира пространствена област, във всяка точка на която е зададена стойност на температурата в разглеждан момент от време. То се описва като функция на пространствените координати на точката ***(x, y, z)*** и времето (***τ***), т.е ***T = f(x ,y, z, τ)***. Това поле е скаларно, тъй като за всяка точка се задава само стойността на температурата. Тъй като температурата е непрекъсната функция на координатите и времето, в температурното поле съществуват повърхнини в които температурата има една и съща стойност. Те се наричат изотермични повърхнини.

В тяло, което не е в температурно равновесие (има различна температура в различните области на тялото) се извършва пренос на топлинна енергия. Такъв процес се нарича топлопроводност. Количествена характеристика на топлопроводността е топлинния поток – вектор с посока в направлението на пренасяне на топлината и големина определяща интензивността на топлопренасянето.

Интензивността на топлопроводност е пропорционална на температурното изменение в разглежданото направление. Тя се определя със закона на Фурие:

$$Q = q \cdot A = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \ , \qquad (11.1)$$

където ***Q*** е пълният топлинен поток, ***q*** - топлинният поток за единица площ (специфичен топлинен поток), ***A*** – площ през която се пренася топлинна енергия, ***λ*** - коефициент на топлопроводност. Производната ***dT/dx*** определя скоростта на изменение на температурата в направление ***x*** (направлението в което се разглежда топлопреноса).

Коефициентът на топлопроводност е материална константа, която зависи от различни фактори – температура, плътност, микроструктура на материала, налягане (за флуидите) и други. За голяма част от материалите, топлопроводността се влияе в най-голяма степен от температурата. Най-често тази зависимост е линейна: $\lambda = \lambda_0(1+\alpha T)$.
където λ_0 е коефициентът на топлопроводност при 0°C, а α е експериментално определена константа, зависеща от типа на веществото.

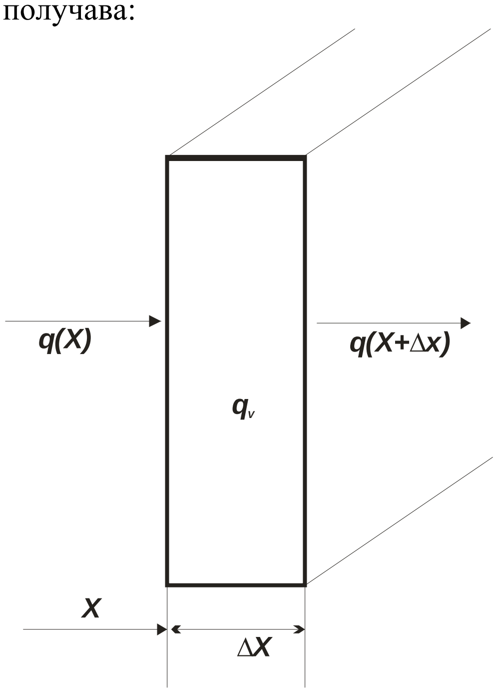
11.2 Основно уравнение на топлопроводността.
Уравнението на топлопроводността (кондуктивен пренос на топлина) се явява математически израз на закона за запазване на енергията в телата (веществата). Извежда се от баланса на енергията за елементарен обем от материала, в който се извършва кондуктивен пренос на топлина. В твърдото тяло конвекцията и лъчистия топлообмен липсват (пренебрежими са). Кондуктивният принос на топлина се определя от уравнението на Фурие. При съставяне на баланса на енергията трябва да се отчитат няколко съставки на топлинния поток.
- Генериране на топлинна енергия в материала. Типичен пример за генериране на топлинна енергия (ТЕ) в твърдо тяло е топлоотделянето при химични реакции; омическото нагряване при протичане на електрически ток в проводници; ядрени реакции в ядрените горива и др.
- Общото уравнение на топлопроводността трябва да отчита акумулирането на енергия в материала при промяна на температурата. Съгласно термодинамиката при повишаване на температурата на тялото се повишава и вътрешната енергия (определя се от коефициента c - специфичен топлинен капацитет). Ако температурата нарасне, тялото поглъща, а ако намалее, тялото отдава топлинна енергия. Ако температурата остава постоянна то топлинна енергия не се акумулира – стационарни условия.
Уравнението на топлопроводността може да бъде записано за представяне на телата в различни координатни системи. Най-прост вид има уравнението на топлопроводността в декартова (правоъгълна) координатна система.

Правоъгълна координатна система.
За простота на извода ще се разглежда едномерен случай и ще се предполага, че температурата на твърдото тяло зависи само от координатата x и времето t т.е. $T = (x, t)$.
Изводите получени за едномерния случай могат лесно да бъдат обобщени за двумерен и тримерен случай. Освен това ще се предполага, че коефициентът на топлопроводност λ, плътността ρ, и специфичния топлинен капацитет c на материала са константи. Генерираната топлинна енергия се задава като специфична топлина q_v [W /m^3].
Законът за съхранение на енергията за елементарния обем показан на фиг.11.1 (контролен обем) трябва да изглежда така:
[енергията подавана към обема чрез топлопроводност] + [енергията генерирана в материала] = [енергията отвеждана от контролния обем] + [енергията акумулирана в обема].
Това балансово равенство записано математически с изразите за топлинния поток (закон на Фурие) и акумулираната топлина изглежда по следния начин:

$$-\lambda.A\frac{\partial T}{\partial x}(x) + q_v A\Delta x = -\lambda A\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x) + \rho A\Delta x c\frac{\partial T}{\partial t}$$

Тук A е площта на повърхността през която се извършва преноса на топлина, Δx - дебелината на елементарния слой през който се разглежда топлопреноса. Произведението $A.\Delta x$ е обемът на разглеждания елемент от тялото. Първият член на равенството (в лявата част) е входящият в елемента поток $q(x)$, а вторият е генерираната в елемента топлина. В дясната част са записани отдавания от елемента поток $q(x+ \Delta x)$ и акумулираната топлинна енергия. Акумулираната топлинна енергия зависи от изменението на

температурата в елемента във времето и затова в израза фигурира производната на температурата по времето.
Ако се раздели това уравнение на контролния обем ***AΔx*** и се приеме че ***λ*** = const, се получава:



Фиг. 11.1. Топлинен баланс

$$\lambda \frac{\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x) - \frac{\partial T}{\partial x}(x) + q_v}{\Delta x} = \rho c \frac{\partial T}{\partial x}$$

При преминаване към граничен преход $\Delta x \to 0$, първият член от горното уравнение преминава в производна (втора производна):

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q_v = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (11.2)$$

Това не е общото уравнение на топлопроводността, защото беше прието да се разглежда едномерен случай на пренасяне на топлина.
Ако се снеме това ограничение и се смята, че температурата зависи от трите координати ***x, y , z*** и времето **t** т.е. ***T = T(x,y,z,t),*** ще се появят членове в горното уравнение описващи преноса по осите ***y , z*** и те ще бъдат аналогични както за оста ***x***.

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_v = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (11.3)$$

Това е общото уравнение на топлопроводността. В него първите три члена представят резултатния пренос на топлинна енергия, вследствие топлопроводност (за единица обем).
Последният член в лявата част е скоростта на генериране на вътрешна топлина. В дясната част се отчита акумулираната енергия (изменението на вътрешната енергия). В измервателната система СИ отделните елементи на баланса в горното уравнение са представени в [W/m^3].
Уравнението на топлопроводността може да се запише и във вида:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (11.4)$$

където ***a = λ/ρ.c$_p$*** се нарича температуропроводно число. Измерителната единица за ***a*** е [м^2/s].
Уравнението на топлопроводността в този общ вид се използва рядко. В голяма част от практическите задачи могат да се направят редица опростяващи предположения. Ще разгледаме някои важни частни случая на уравнението на топлопроводността.
Ако температурата на материала в разглежданата област не се изменя във времето процесът е стационарен и може да се опише с по-просто уравнение. В този случай производната по времето ***∂T/∂t*** е нула и членът в дясната част на горното уравнение ще се елиминира. Това означава, че при стационарен режим не се акумулира топлинна енергия.
Стационарното уравнение на топлопроводността има вида:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_V}{\lambda} = 0 \qquad (11.5)$$

Ако липсва генериране на вътрешна топлина в материала тримерното уравнение на топлопроводността има още по-опростена форма:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (11.6)$$

Това уравнение е известно като уравнение на Лаплас и се среща в много други области на физиката.

Когато температурното поле зависи не от трите пространствени променливи ***x, y*** и ***z***, а само от две от тях или само от една от тях, уравнението се опростява, тъй като част от елементите в лявата част на уравнението стават нули. Най-прост вид има стационарното едномерно уравнение на топлопроводността:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \qquad (11.7)$$

Безразмерна форма на уравнението на топлопроводността

Уравнението на топлопроводността записано в горните форми е размерно, защото всеки член от него има определена измерителна единица. Често се налага уравненията да се записват в безразмерен вид. В този случай отделните членове в уравнението са безразмерни величини. Това се постига чрез въвеждане на безразмерни параметри (величини):

$$\theta = \frac{T}{T_r}, \quad \xi = \frac{x}{L_r} \quad \tau = \frac{t}{t_r} \qquad (11.8)$$

където $\boldsymbol{T_r}$, $\boldsymbol{L_r}$ и $\boldsymbol{t_r}$ са характерни стойности на величините: температура, дължина (размер) и време. Изборът на характерните величини е произволен, въпреки че е за предпочитане тези стойности да бъдат добре подбрани за да е по-лесно тълкуването на резултатите от решаване на уравнението на топлопроводността. Често, вместо отношения на температури е удобно да се използва отношение на температурна разлика. В много случаи характерните величини се подбират така, че интервалът на изменение на безразмерните параметри $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\tau}$ да се изменят в интервала от 0 до 1. Това означава, че за характерни величини се вземат максимално възможните стойности на обезразмеряваните величини.

Ако изразим величините участващи в уравнението на топлопроводността от горните изрази: $\boldsymbol{T = \theta. T_r}$; $\boldsymbol{x = \xi.L_r}$ и $\boldsymbol{t = \tau.t_r}$ и заместим в уравнението на топлопроводността (11.2) се получава:

$$\frac{T_r}{L_r^{\,2}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi} \cdot + \cdot q_V \cdot = \cdot \frac{1}{a}\frac{T_r}{t_r}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

или:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi} \cdot + \cdot q_V \cdot \frac{L_r^{\,2}}{\lambda \cdot T_r} = \cdot \frac{1}{a}\frac{L_r^{\,2}}{t_r}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

Безразмерният комплекс в дясната част на уравнението е известен като критерий на Фурие:

$$F_o \cdot = \cdot \frac{a \cdot t_r}{L_r^{\,2}} \qquad (11.9)$$

Критерият на Фурие представя отношението на скоростта на кондуктивния топлообмен към скоростта на акумулиране на топлинна енергия. Това е един от най-важните критерии в процесите на нестационарна топлопроводност.

Вторият безразмерен критерий се получава от отношението на генерираната топлинна енергия към кондуктивния топлинен пренос:

$$\overline{q}_V \cdot = \cdot \frac{q_V L_r^{\,2}}{\lambda \cdot T_r} \qquad (11.10)$$

Безразмерният вид на уравнението на топлопроводността приема вида:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi}\cdot+\cdot\overline{q}_V\cdot=\cdot\frac{1}{F_o}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\qquad(11.11)$$

В това уравнение всички членове са бездимензионни.

Цилиндрична координатна система

Уравнението на топлопроводността може да бъде записано и в други типове координатна система. Най-често в практиката се използват цилиндрична и сферична координатна система.

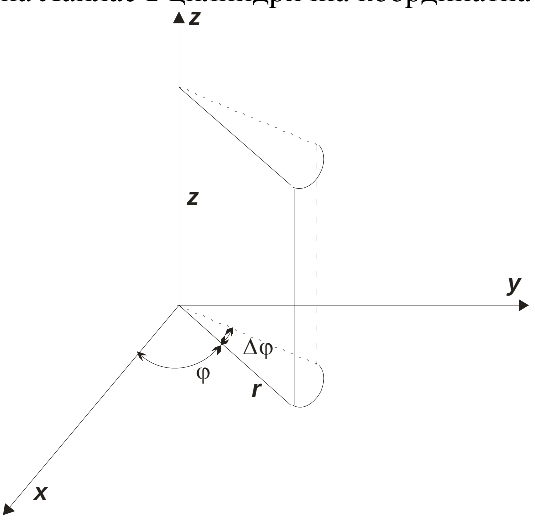
От анализа на уравнението на топлопроводността може да се установи, че генерираната топлинна енергия и акумулацията на енергия не зависят от типа на координатната система. Само кондуктивният пренос зависи от координатната система. За да може лесно да се преминава в различни координатни системи е удобно уравнението на топлопроводността да се запише във векторна форма – чрез оператора на Лаплас:

$$\nabla^2 T\cdot=\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\ \text{, или}$$

$$\nabla^2 T+\frac{q_v}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad(11.12)$$

Уравнение (11.12) не е свързано с конкретна координатна система. Когато трябва да се запише уравнението на топлопроводността в конкретна координатна система е необходимо операторът $\nabla^2 T$ да се представи в желаната координатна система.

За цилиндрична координатна система температурното разпределение се представя във вида: $T=T(r,\varphi,z,t)$, където пространствени координати са: ***φ, r, z***. - фиг.11.2**.** Операторът на Лаплас в цилиндрична координатна система има вида :



Фиг. 11.2. Цилиндрична координатна система

$$\nabla^2 T=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

(11.13)

Тогава уравнението на топлопроводността в цилиндрична координатна система е :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_v}{\lambda}+\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial\tau}$$

(11.14)

Ако топлопроводността се пренася само по две от координатите – по ***r*** и ***z*** то уравнението на топлопроводността има вида :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q_v}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}\qquad(11.15)$$

Ако температурата се изменя само по ***r*** :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{q_v}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Ако процесът е стационарен :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_v=0\qquad(11.16)$$

Топлопроводността може да се разглежда и без вътрешна генерирана топлина:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=0 \qquad (11.17)$$

Сферична координатна система

Температурата в сферична координатна система е функция на радиуса ***r*** и на ъгловите координати ***θ*** (географска дължина) и ***φ*** (географска ширина): $T=T(r,\varphi,\theta,t)$

Операторът на Лаплас в сферична координатна система има вида:

$$\nabla^2 T=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2} \qquad (11.18)$$

или уравнението на топлопроводността ще изглежда по-следния начин:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{q_v}{\lambda}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (11.19)$$

Стационарното уравнение ще бъде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\varphi^2}+\frac{q_v}{\lambda}=0 \qquad (11.20)$$

Най-прост вид има едномерното стационарно уравнение на топлопроводността (без генериране на топлинна енергия)

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad (11.21)$$

11.3. Аналитични решения на уравнението на топлопроводността

Аналитични решения на уравнението на топлопроводността могат да бъдат получени само за частни случаи и за прости (регулярни) гранични условия. Най-често аналитични решения се използват за стационарни топлинни процеси при едномерно разпределение на температурата. Поради тази причина тук основно внимание ще бъде отделено на тези случаи, а за по-сложните задачи ще бъдат въведени числени методи за решаване.

При правоъгълна координатна система ще се предполага, че температурата се изменя само в едно направление – например по оста ***x***. В цилиндрична и сферична координатни система поради наличието на симетрия по отношение на ъгловите координати, обикновено се разглеждат процеси, в които температурата ***T*** се изменя само по радиуса - $T=T(r)$.

Ще бъде използван общ подход – най-напред се определя температурното разпределение (изменение на температурата), а след това се определя и топлинния поток.