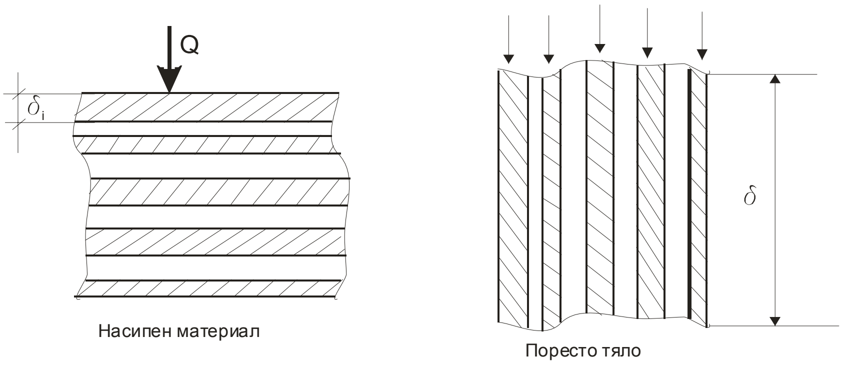
Лекция 8

11.4 Топлопроводност през сухи порести тела



Фиг. 11.10. Топлопроводност през порести тела

Такова тяло се състои от сухо твърдо вещество и въздух. Разликата в топлопроводността на въздуха и твърдите тела е голяма: $\lambda_{възд} = 0{,}026 \div 0{,}028 \left[W / mK\right]$ и $\lambda_T = \left(1 \div 420 W / mK\right)$ Топлинният поток в такива тела се пренася през стените от твърд материал, но се възпрепятства от въздушните пространства. Има различни модели на порести тела. На фиг. 11.10 са представени два модела. Първият е модел на насипен материал, при който се редуват слоеве твърд материал и въздушни междини и топлинният поток се пренася напречно на слоевете. Вторият модел е поресто тяло, при което топлинният поток се пренася по стените на твърдия материал, но сечението през което се пренася топлината се редуцира от въздушните пространства (пори) в материала.

За приблизителни изчисления се използват редуцирани (приведени) коефициенти на топлопроводност, които зависят от порьозността ψ:

$$\psi = \frac{V_{възд}}{V_{възд} + V_T} \qquad (11.56)$$

където $\boldsymbol{V_{възд}}$ и $\boldsymbol{V_T}$ са обемите на въздуха и твърдото вещество в порестия материал.

За модела на насипен материал, топлинният поток може да се запише във вида:

$$Q_H = \frac{F\left(T_1 - T_2\right)}{\dfrac{\sum \delta_T}{\lambda_T} + \dfrac{\sum \delta_{възд}}{\lambda_b}}, \qquad (11.57)$$

където $\sum \delta_T$ е сумата от дебелините на твърдите слоеве, $\sum \delta_{възд}$ - сумата на въздушните слоеве, $\boldsymbol{F}$ – сечението през което се пренася топлината, δ_T и $\delta_{възд}$ са сумарните дебелини на слоевете твърд материал и въздушни междини

За втория модел топлинният поток се записва във вида:

$$Q_n = \left(\lambda_T \sum F_T + \lambda_b \sum F_B\right)\left(\frac{T_1 - T_2}{\delta}\right) \qquad (11.58)$$

Могат да се използват приведени (обобщени) коефициенти на топлопроводност:

$$Q_H = \frac{\lambda_H}{\delta} F\left(T_1 - T_2\right) \quad \text{и} \quad Q_H = \frac{\lambda_n}{\delta} F\left(T_1 - T_2\right),$$

където за насипни материали :

$$\frac{\lambda_H}{\delta} = \frac{1}{\dfrac{\sum \delta_T}{\lambda_T} + \dfrac{\sum \delta_B}{\lambda_B}} \quad \text{или} \quad \lambda_H = \frac{1}{\dfrac{\sum \delta_T}{\lambda_T \delta} + \dfrac{\sum \delta_B}{\lambda_B \delta}}$$

Ако ψ е относителният обем на въздуха, то 1-ψ е относителният обем на твърдото вещество. Ако с δ се означи дебелината материала, $\boldsymbol{L}$ – дължината , а ширината се приеме равна на единица, то за обема може да се запише:

$$\delta \cdot L \cdot 1 = V_{възд} + V_T,$$

където $\delta = \delta_{възд} + \delta_T$

$$V_{възд} = L.1.\delta_{възд} \quad \text{и} \quad V_T = L.1.\delta_T$$

тогава може да се запише:

$$1-\psi = \frac{V_T}{V_T + V_B} = \frac{\sum \delta_T .L.1}{\delta .L} = \frac{\sum \delta_T}{L}$$

и $$\psi = \frac{V_B}{V_B + V_T} = \frac{\sum S_b L}{SL} = \frac{\sum \delta_B}{\delta}$$

Следователно за приведения коефициент на топлопроводност:

$$\lambda_H = \frac{1}{\dfrac{1-\psi}{\lambda_T} + \dfrac{\psi}{\lambda_B}} \left[W / mK \right] \qquad (11.59)$$

За пористи тела се получават следните изрази:

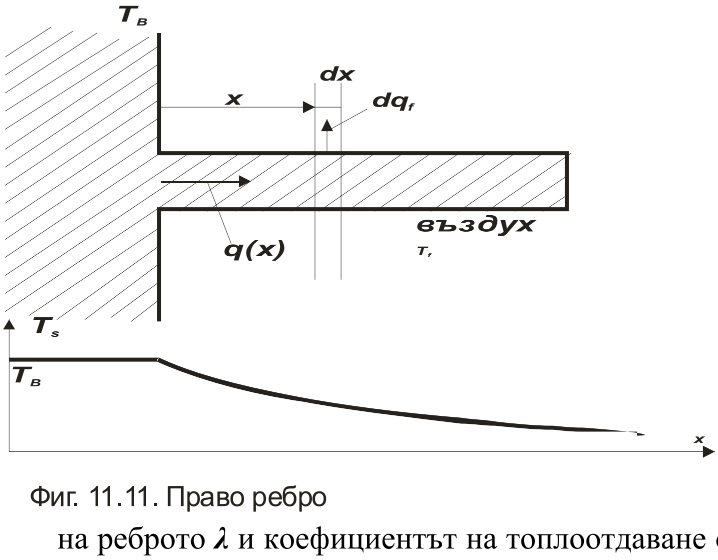
$$\lambda_H F = \left(\lambda_T \sum F_T + \lambda_B \sum F_B \right)$$

Тъй като $\dfrac{\sum F_T}{F} = 1-\psi$ и $\dfrac{\sum F_B}{F} = \psi$, то

$$\lambda_H = \lambda_T (1-\psi) + \lambda_B (\psi) \qquad (11.60)$$

11.5. Топлоотдаване от право ребро (прът) с постоянно напречно сечение

Ребрата са елементи, които често се срещат в топлотехниката. Чрез тях се регулира топлоотдаването от работни повърхнини на съоръженията. Особено, голямо приложение има оребряването на повърхнини, когато топлоотдаването е към газова среда. Известно, е че коефициентът на конвективен топлообмен към флуидни среди зависи от топлофизичните характеристики на флуидите. Така, когато повърхнини се обтичат с течности се получават интензивни топлинни потоци (големи стойности на коефициента на конвективен топлообмен). Когато топлообмена е към газови среди (въздух), поради специфичните топлофизични характеристики на газовете (ниски стойности на топлопроводността, специфичния топлинен капацитет и плътността) се получава топлинен поток с ниска интензивност. За да се усили топлообмена в тези случаи се увеличава повърхността чрез която се отдава топлината. Това се постига с формиране на специални ребра (оребряване). Типична форма на право ребро е показана на фиг.11.11. Това може да бъде пластина или цилиндричен прът. За термичния анализ на топлообменните процеси в право ребро се правят следните опростяващи предположения:



Фиг. 11.11. Право ребро

- Топлопроводността на материала на реброто е голяма, а дебелината малка. Това определя малко изменение на температурата по височина в дадено сечение. За термичния анализ ще се предполага, че температурата в дадено сечение на реброто е еднаква.
- Реброто е заобиколено от флуид с постоянна температура T_f .
- Температурата на стената (в основата на реброто) е постоянна - $\boldsymbol{T_B}$.
- Топлопроводността на материала на реброто $\boldsymbol{\lambda}$ и коефициентът на топлоотдаване от реброто към флуида $\boldsymbol{\alpha}$ са постоянни величини.

Ако се означи с θ температурната разликата $\theta = T - T_f$ (температурната разлика между повърхността на реброто и флуида), за топлинния поток от топлопроводност в реброто може да се запише:

$$q(x) = -\lambda \frac{d\theta}{dx} S \,,$$

където S е сечението на реброто.

За сечение отдалечено на разстояние ***dx*** от разглежданото, топлинния поток ще бъде:

$$q(x+dx) = -\lambda \frac{d}{dx}\left(\theta + \frac{d\theta}{dx}dx\right)S$$

Топлинният поток от повърхността, която обхваща безкрайно малкия елемент ***dx*** към флуида е :

$$dq_f = \alpha\theta \; Udx \quad ,$$

където U е средния периметър на сечението.

Тези потоци са свързани помежду си с уравнението за баланса на енергията:

$$q(x) - q(x+dx) = dq_f$$

или $$-\chi \frac{d\theta}{dx} S + \lambda \frac{d}{dx}\left(\theta + \frac{d\theta}{dx}dx\right)S = \alpha\theta U dx$$

Ако се разделят двете части на това равенство с ***dx*** се получава:

$$\frac{\lambda \dfrac{d}{dx}\theta(x+dx) - \chi \dfrac{d}{dx}\theta}{dx} = \alpha\theta U$$

Ако се остави ***dx*** да клони към нула, изразът в лявата част преминава към производна:

$$\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2} S = \alpha\theta \; U \quad \text{или}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{\alpha U}{\chi S}\theta \qquad (11.61)$$

което е диференциалното уравнение, описващо процесите в право ребро.

Ако се направи полагането:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\chi S}\left[m^{-1}\right]} \qquad (11.62)$$

за уравнението на право ребро се получава:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = m^2\theta \qquad (11.63)$$

При направените предположения : $m = const$ и уравнение (11.63) има общо решение във вида:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mk} \quad , \qquad (11.64)$$

а също и във вида:

$$\theta(x) = C_1 ch(mx) + C_2 sh(mx) \qquad (11.64)$$

Интеграционните константи се намират от граничните условия. Разглеждат се три вида гранични условия:

1. **Ребро с безкрайна дължина**

Първото гранично условия е еднакво за всички разглеждани случаи. То се отнася за основата на реброто (***x = 0***):

$$\theta = \theta_1 = T_s - T_f$$

тогава $$\theta_1 = C_1 + C_2$$

Второто условие означава, че в безкрайността температурата на реброто (пръта) ще се изравни с тази на флуида $x \to \infty; \theta = 0 \Rightarrow C_1 e^{\infty} = 0$

Но $C_1 e^{\infty} = 0$ е възможно само при $C_1 = 0$. Тогава:

$$\theta = \theta_1 e^{-mx} \tag{11.65}$$

в безмерен вид:

$$\frac{\theta}{\theta_1} = l^{-mx}, \tag{11.66}$$

т.е. температурата на реброто пада толкова по-бързо, колкото е по-голямо ***m***. Ако реброто се използва за охлаждане или нагряване, то температурната разлика не трябва да пада бързо т.е ***m*** не трябва да е малко. Това се постига с високи λ и α.

При ребра с еднакво сечение по-ефективно е ребро с по-малко отношение U/S

Топлинният поток отдаден от повърхността на реброто е равен на потока от топлопроводност преминаващ в сечение ***x = 0***:

$$q = -\chi\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} S \quad \text{или} \quad \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\theta_1 l^{-mx}\right)_{x=0} = -m\theta_1$$

тогава топлинният поток е:

$$q = \lambda\, m\, \theta S \tag{11.67}$$

или записано с температурите :

$$q = \sqrt{\alpha\lambda US}\left(T_{CT} - T\right) \tag{11.68}$$

За ребрата обикновено дебелината е много малка, в сравнение с ширината и може да се приеме:

U ≈ 2.W и S = ≈ δW

където W е ширина на реброто.

В този случай се получава опростен израз за показателя m: $m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\chi\delta}}$

2. Ребро с крайна дължина

Граничните условия в този случай са:

$x = 0 \Rightarrow \theta = \theta_1$

$x = L \Rightarrow q(L) = \alpha_L \theta_L S_L$

където ***q(L)*** е потокът през челото на реброто

Второто условие се записва във вида:

$$q_{(L)} = -\chi\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=L} S_L = \alpha_L \theta_L S_L \tag{11.69}$$

или : $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = -\frac{\alpha_L}{\chi}\theta_L$

Тогава за константите се получава :

$$x = 0 \Rightarrow \theta = C_1 + C_2$$

$$x = L \Rightarrow \theta_L = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

$$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_L = -\frac{\alpha_L}{\chi}\theta_L = C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL}$$

Това са три уравнения в които има три неизвестни: C_1, C_2, θ_L. След решаването им се получава температурното разпределение и топлинния поток.

Опростяване на резултатите се получава, ако се пренебрегне топлинния поток през челото на реброто (например, когато има симетрични ребра) или когато реброто е много тънко. Тогава :

$$\theta = \theta_1 \frac{ch[m(L-x)]}{ch(mL)} \qquad (11.70)$$

Топлинният поток в този случай е :

$$q = -\lambda \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} S,$$

но $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_{x=0} = -\theta_1 m \frac{sh(mL)}{ch(mL)} = -\theta_1 mth(mL)$

и за топлинния поток може да се запише:

$$q = \lambda \theta_1 mth(mL) S \qquad (11.71)$$

и $q = \sqrt{\alpha \lambda U S}\, th(mL)\theta_1$

При увеличаване на $\boldsymbol{L}$ (дължината на реброто) $th(mL) \Rightarrow 1$ и решението се приближава към решението за безкрайно ребро.

Коефициент на ефективност на ребро

Както в термодинамиката се дефинира коефициент на полезно действие и тук може да се дефинира величина, която да се нарече коефициент на ефективност на реброто. Този коефициент трябва да представлява отношение на реалния топлинен поток реализиран от реброто към максимално възможния топлинен поток (идеално ребро):

$$\eta = \frac{q_{реално}}{q_{идеално}} \qquad (11.72)$$

Идеалното ребро се дефинира, като ребро с безкрайно голяма топлопроводност на материала. Тогава температурата в основата на реброто $\boldsymbol{T_B}$ би се установила по цялата дължина на реброто (нама спад на температурата към края на реброто). Топлинният поток на такова ребро би бил:

$$q_{идеално} = \alpha A (T_s - T_f) = \alpha A \theta_1, \qquad (11.73)$$

където A е общата площ на реброто. Тогава от (11.72) може да се определи реалния топлинен поток от реброто:

$$q_{реално} = \eta \alpha A (T_s - T_f) \qquad (11.74)$$

Този резултат може да се тълкува физически и по следния начин. Топлоодаването от реброто може да се разглежда, като топлоотдаване от идеално ребро с редуцирана топлообменна повърхнина A’ = η.A.

Коефициентът на ефективност на ребро с изолирано чело може да се определи от:

$$\eta = \frac{q_{реално}}{q_{идеално}} = \frac{m\chi_s \theta_1 th(mL)}{\alpha A \theta_1} = \frac{th(mL)}{mL} \qquad (11.75)$$

защото $q_{реално} = \sqrt{\alpha \lambda U S}\, th(mL)\theta_1 = \lambda S m th(mL)\theta_1$

11.6. Нестационарна топлопроводност

Аналитично решение при нестационарна топлопроводност може да се получи само при съществени опростявания на реалните процеси. Един от случаите при които може да се получи аналитично решение е разглеждане на тяло с много малко термично съпротивление.

Тяло с пренебрежимо термично съпротивление

За такова тяло, температурното поле се изменя във времето, но в пространствената област температурата е постоянна , тъй като поради малкото съпротивление температурата много бързо се изравнява по цялото тяло. Ако топлинната енергия се предава от тялото към околната среда чрез конвекция, то условието за равномерно температурно поле би се изпълнявало ако съпротивлението от топлопроводност е много по-малко от съпротивлението на конвективен пренос. Система, която удовлетворява такова условие се нарича система пренебрежимо вътрешно термично съпротивление или система със съсредоточена топлоемкост. Ако тяло има малко вътрешно термично съпротивление, градиента на температурата вътре в тялото е много по-малка от градиента към околната среда. Като критерии за пренебрежимост на вътрешното термично съпротивление се използва критерия на Вио.

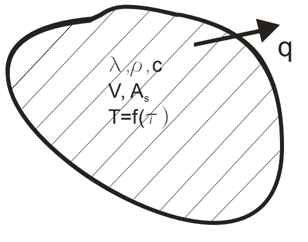
$$B_i = \frac{\alpha_c L}{\lambda} << 1 \qquad (11.76)$$

където α_c – коефициент на конвективна топлообменност, λ – топлопроводност, $\boldsymbol{L}$ – характерен размер на тялото

За тяло с неправилна форма за характерен размер $\boldsymbol{L}$ може да се приеме отношението на обема на тялото към околната повърхнина на тялото.

$$L = \frac{V}{S_{ok}} = \frac{V}{A_s} \qquad (11.77)$$

Разглежда се тяло с произволна форма (фиг.11.12).



Фиг. 11.12. Тяло с пренебрежимо съпротивление

От баланса на енергията за тялото се получава :

$$-\rho V_{cp}\frac{dT(\tau)}{d\tau} = \alpha_c A_s\left(T_{(\tau)} - T_a\right) \qquad (11.78)$$

$\boldsymbol{A_s}$ - околна повърхнина, $\boldsymbol{V}$ - обем на тялото.

В лявата част на уравнението е записана енергията, която се акумулира (или отнема), а в дясната част - енергията, която се поглъща (отнема) от тялото чрез конвекция от флуида около тялото.

Това е обикновено диференциално уравнение с независима променлива τ - времето на протичане на процеса. Зависима променлива е температурата $T(\tau)$, която се смята за еднаква за цялото тяло (поради пренебрежимото термично съпротивление) и зависеща само от времето.

Решението на това уравнение дава разпределението (хода) на температура на тялото във времето, като цяло, тъй като термичното съпротивление е малко и температурно поле бързо се изравнява по целия обем.

Уравнението може да се опрости, ако се въведе температурната разлика като независима променлива величина:

$$\theta_{(\delta)} = T_{(\delta)} - T_a \qquad (11.79)$$

За решаване на уравнението е необходимо да се въведе начално условие (за нестационарните уравнения е необходимо начално условие). Например за момент $\tau = 0$, може да се приеме, че е известна температурата $T = T_o$, т.е. за $\tau = 0 \rightarrow \theta = \theta_o = T_o - T_a$

Уравнението може да бъде записано чрез θ във вида:

$$-\rho V_{cp}\frac{d\theta}{d\delta} = \alpha_c A_s \theta \qquad (11.80)$$

то може да се преобразува във вида:

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\alpha_c A_s}{\rho V_{cp}} d\delta$$

и след интегриране да се получи:

$$\ln\theta\Big|_{\tau=0}^{\tau} = -\frac{\alpha_c A_s}{\rho V_{cp}}\Big|_{0}^{\tau}$$

След заместване с границите на интегриране: τ = 0 и τ се получава израз за изменение на температурата във времето:

$\ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) = -\frac{\alpha_c A_s}{\rho V_{cp}}\tau$ и след вземане на експонента в двете страни на равенството се получава експоненциалното разпределение на температурата в тялото:

$$\frac{\theta(\delta)}{\theta_o} = e^{-\frac{\alpha_c A_s}{\rho V_{cp}}\tau} \qquad (11.81)$$

Изразът в лявата част е безразмерна температура и следователно, дясната част също трябва да бъде безразмерен параметър, т.е $\frac{\alpha_c A_s}{\rho V_{cp}}\tau$ е безразмерна величина. Анализът на този израз показва, че той представляват произведение от два други безразмерни параметъра – параметър (критерий) на Био и параметър (критерий) на Фурие, които бяха въведени по-рано:

$(B_i)(F_o) = \frac{\alpha_c L}{\lambda}\frac{a\tau}{L^2}$, където $L = \frac{V}{A_s}$ и $\frac{1}{a} = \frac{\rho c}{\chi}$

Тогава изразът за разпределение на температурата приема вида.

$$\frac{\theta(\delta)}{\theta} = e^{-B_i F_o} \qquad \text{или} \qquad \theta(\delta) = \theta_o e^{B_i F_i} \qquad (11.82)$$

Това решение има смисъл, когато B_i <<1. Изследванията показват, че ако B_i<0,1, грешката при определяне на температурното изменение на тяло, получена от пренебрегване на термичното съпротивление не надвишава 5%.

Моментната стойност на топлинен поток при нестационарна топлопроводност се определя от израза (дясната част на 11.65):

$$q(\tau) = \alpha_c A_S \theta$$

и като се поставим θ от горното равенство (11.82) се получава:

$$q(\tau) = \alpha_c A_S \theta_o e^{-B_i F_o} \qquad (11.83)$$

Топлинната енергия, която се отдава или поглъща за период от време $\boldsymbol{\tau}$ от началото на процеса се получава, чрез интегриране на израза (11.83):

$$Q(\tau) = \int_{\tau=0}^{\tau} q(\tau)d\tau = \alpha_c A_S \theta_o \int_{\delta=0}^{\delta} e^{-B_i F_o} d\tau \qquad (11.84)$$

В безмерен вид този израз има вида:

$$\frac{Q(\delta)}{\alpha_c A_S \theta_0} = \left[1 - e^{-B_i F_o}\right]\frac{1}{B_i F_o} \qquad (11.85)$$

Такъв подход за решаване на нестационарна задача може да се приложи и за течности, които се смесват (разбъркват) непрекъснато по време на процеса. За добре разбърквана течност също са в сила горните изрази за изменението на температурата и топлинния поток.